LABORATORIO DI MATEMATICA
I LIMITI CON WIRIS

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris calcoliamo il limite: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Ricaviamo, poi, applicando la definizione di limite e sfruttando la potenza di calcolo del sistema, l'ordine di grandezza che lega ε, il numero positivo da scegliere piccolo a piacere, a δ, il numero che dà l'ampiezza del corrispondente intorno di 2.

Il calcolo del limite

• Per calcolare il limite facciamo clic sul relativo pulsante (figura 1) del menu di *Analisi*, importando nell'area di lavoro il modello dell'operatore *limite*.
• Carichiamo opportunamente i campi vuoti, rispettivamente quelli della funzione, della variabile indipendente x e del valore al quale tende x, che qui è 2.

▲ **Figura 1** Il pulsante dell'operatore *limite*.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2} \to 4$$

◀ **Figura 2**

• Facciamo clic sul pulsante *Calcola* e il sistema mostra 4, il limite della funzione per x tendente a 2 (figura 2).

Una prima valutazione (figura 3)

• Per ottemperare alla richiesta di stabilire l'ordine di grandezza che lega ε a δ, entriamo in nuovo blocco di Wiris e inizialmente indichiamo al sistema di aumentare il numero delle cifre dei numeri decimali da visualizzare con l'istruzione *precisione* (di default le cifre sono 5 fra intere e decimali).

precisione(15);
ε = 0.01;
$a = \text{risolvere}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2} - 4 = -\varepsilon\right) \to \{\{x=2.00334448160535\}\}$
$b = \text{risolvere}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2} - 4 = \varepsilon\right) \to \{\{x=1.99667774086379\}\}$
$\delta = \text{valore\_assoluto}(b_{1,1,2} - a_{1,1,2}) \to 0.00666674074156348$

◀ **Figura 3**

• Assegniamo a ε il valore 0,01 (un centesimo).
• Per la definizione di limite sappiamo che, scelto ε positivo, esiste in corrispondenza un intorno di 2 per tutti i punti del quale, escluso al più $x = 2$, vale la disuguaglianza

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} - 4 \right| < \varepsilon,$$

che possiamo scrivere:

$$-\varepsilon < \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} - 4 < \varepsilon.$$

Usiamo allora Wiris per trovare gli estremi dell'intorno di 2 come soluzioni rispettivamente delle equazioni $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} - 4 = \varepsilon$ e $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} - 4 = -\varepsilon$, scrivendo in due righe del blocco il comando *risolvere* con le equazioni suddette.

• Impostiamo poi il calcolo dell'ampiezza dell'intorno come valore assoluto della differenza dei due estremi. Notiamo i pedici posti sia ad a sia a b, che servono per liberare le soluzioni delle equazioni dalle parentesi graffe e dalla lettera x.
• Attiviamo infine *Calcola*, ottenendo nel blocco i valori dei due estremi e l'ampiezza δ dell'intorno di 2, che risulta essere di circa 6,7 millesimi.

Una seconda valutazione (figura 4)
• Per operare una seconda valutazione spostiamo il cursore nella seconda riga del blocco e cambiamo l'assegnazione a ε, al posto del valore 0.001 (un centesimo) digitiamo il valore 0,000001 (un milionesimo).

precisione(15);
$\varepsilon = 0.000001$;
$$a = \text{risolvere}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2} - 4 = -\varepsilon\right) \rightarrow \{\{x=2.00000033333344\}\}$$
$$b = \text{risolvere}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3\cdot x+2} - 4 = \varepsilon\right) \rightarrow \{\{x=1.99999966666678\}\}$$
$$\delta = \text{valore\_assoluto}(b_{1,1,2} - a_{1,1,2}) \rightarrow 6.66666666759852\cdot 10^{-7}$$

◀ **Figura 4**

• Diamo *Calcola*, il sistema rielabora tutto il blocco e mostra i nuovi valori degli estremi e l'ampiezza δ dell'intorno di 2. Notiamo il formato esponenziale del numero, il cui ordine di grandezza ora è di circa 6,7 decimilionesimi.

Esercitazioni

1 Per ognuno dei seguenti limiti,

$$\text{a) } \lim_{x\to 3} \frac{x^3+3x^2-9x-27}{x^3+5x^2+3x-3}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x-2}}{3\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 2^+} \frac{3\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-x-2}},$$

trova con il programma Wiris il risultato.

Imposta poi la definizione di limite. Assegna dei valori a ε, il numero positivo piccolo, e trova δ, l'ampiezza dell'intorno di c corrispondente a ε, sfruttando opportunamente la potenza di calcolo numerico del sistema. Osserva, nei vari casi, gli ordini di grandezza dei numeri che legano ε a δ.
(Tieni presente che, quando usi uno strumento di calcolo automatico, è consigliabile accettare criticamente i risultati. Ricorda altresì che puoi controllare i risultati che ti vengono proposti con i diversi strumenti del sistema stesso.)

$\left[\text{a) } \frac{3}{2}; \text{ b) } \frac{1}{3}; \text{ c) } \sqrt{6}\right]$

2 Dati i seguenti limiti,

$$\text{a) } \lim_{x\to \infty} \frac{3x^2}{x^2+4}, \quad \text{b) } \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{5x}, \quad \text{c) } \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{x^3},$$

opera cone nell'esercitazione 1 per osservare nei vari casi gli ordini di grandezza dei numeri che legano ε a N, il valore dell'estremo dell'intorno di infinito corrispondente a ε.

$\left[\text{a) } 3; \text{ b) } \frac{1}{5}; \text{ c) } 0\right]$

3 Dati i seguenti limiti,

$$\text{a) } \lim_{x\to 4} \frac{x^2+2}{x-4}, \quad \text{b) } \lim_{x\to \frac{3}{4}} \frac{x^4+1}{(4x-3)^2}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{(1-x)^3},$$

opera come nell'esercitazione 1 per osservare nei vari casi gli ordini di grandezza dei numeri che legano M, un numero positivo grande, a δ, l'ampiezza dell'intorno di c corrispondente a M. $[\text{a) } \infty; \text{ b) } \infty; \text{ c) } \infty]$

4 Dati i seguenti limiti,

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4}$, b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 32}{x + 2}$,

opera come nell'esercitazione 1 per osservare nei vari casi gli ordini di grandezza dei numeri che legano M a N. [a) ∞; b) ∞; c) ∞]