LABORATORIO DI MATEMATICA
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON WIRIS

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Wiris:

- **risolviamo l'equazione differenziale**

$$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{x}{(x-1)^2};$$

- **determiniamo fra i suoi integrali particolari quelli tangenti alla retta di equazione $y = -x + 4$;**
- **verifichiamo che gli integrali particolari trovati soddisfino sia l'equazione differenziale sia la condizione richiesta;**
- **tracciamo il grafico della retta e degli integrali trovati.**

Il problema di Cauchy

Osserviamo che i punti del piano cartesiano che soddisfano la condizione iniziale del problema di Cauchy per l'equazione differenziale data sono quelli non appartenenti alle rette $x = 0$ e $x = 1$.

L'integrale generale (figura 1)

- Per ottenere l'integrale generale dell'equazione differenziale, digitiamo all'interno del comando *risolvere* la sua espressione. In particolare, per scrivere la derivata importiamo con un clic sul pulsante della derivata (figura 2), contenuto nella *palette* di *Analisi*, il relativo modello.

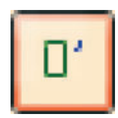
$$\text{risolvere}\left(y(x)' - \frac{1}{x}\cdot y(x) = -\frac{x}{(x-1)^2}\right) \rightarrow \left\{\left\{y(x) = \frac{c\cdot x^2 - c\cdot x + x}{x-1}\right\}\right\}$$

◀ **Figura 1**

- Facciamo clic sul pulsante *Calcola*, ricavando l'integrale generale dell'equazione differenziale data.

Gli integrali richiesti (figura 3)

Osserviamo che nel nostro caso le intersezioni della retta $y = -x + 4$ con ognuna delle soluzioni dell'equazione differenziale possono essere due (retta secante), una (retta tangente) o nessuna (retta esterna), e si trovano mettendo a sistema l'equazione della retta con le equazioni degli integrali.



▲ **Figura 2 Il pulsante per la derivata.**

- Impostiamo, pertanto, la ricerca delle ascisse delle intersezioni fra integrali e retta in funzione del parametro c, scrivendo all'interno del comando *risolvere* l'espressione dell'integrale generale uguagliata al secondo membro dell'equazione della retta.
- Con *Calcola* le otteniamo.
- Applichiamo la condizione di tangenza, estraendo con *Copia* il discriminante e inserendolo con *Incolla* uguagliato a 0 dentro *risolvere*.
- Facciamo operare il comando, ricavando i valori di c che annullano il discriminante e di conseguenza individuano le curve tangenti alla retta.
- Con il comando *sostituire* applicato due volte all'integrale generale ricaviamo i due integrali richiesti.

$$\text{risolvere}\left(\frac{c\cdot x^2 - c\cdot x + x}{x-1} == -x+4,\ x\right) \rightarrow \left\{\left\{x = -\frac{\sqrt{c^2-8\cdot c}}{2\cdot c+2} + \frac{c+4}{2\cdot c+2}\right\},\left\{x = \frac{\sqrt{c^2-8\cdot c}}{2\cdot c+2} + \frac{c+4}{2\cdot c+2}\right\}\right\}$$

$$\text{risolvere}(c^2 - 8\cdot c = 0) \rightarrow \{\{c=0\},\{c=8\}\}$$

$$\text{sostituire}\left(y(x) = \frac{c\cdot x^2 - c\cdot x + x}{x-1},\ c,\ 0\right) \rightarrow y(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{sostituire}\left(y(x) = \frac{c\cdot x^2 - c\cdot x + x}{x-1},\ c,\ 8\right) \rightarrow y(x) = \frac{8\cdot x^2 - 7\cdot x}{x-1}$$

◀ **Figura 3**

La prima verifica (figura 4)

- Impostiamo la verifica con la sostituzione nell'equazione differenziale della variabile dipendente *y* con il primo integrale particolare trovato, seguita da un punto di domanda.
- Diamo *Calcola* e il sistema, a conferma dell'accettabilità della soluzione, risponde *vero*.
- Operiamo similmente per l'altro integrale.

$$\frac{x}{x-1}' - \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-1} = -\frac{x}{(x-1)^2}? \rightarrow \text{vero}$$

$$\frac{8\cdot x^2-7\cdot x}{x-1}' - \frac{1}{x}\cdot\frac{8\cdot x^2-7\cdot x}{x-1} = -\frac{x}{(x-1)^2}? \rightarrow \text{vero}$$

◀ **Figura 4**

La seconda verifica (figura 5)

- Per svolgere la seconda verifica cerchiamo con *risolvere_sistema* le intersezioni fra la retta e uno dei due integrali trovati.
- Con *Calcola* troviamo le coordinate di un solo punto, quello di tangenza.

$$\text{risolvere}\begin{cases} y=\dfrac{8\cdot x^2-7\cdot x}{x-1} \\ y=-x+4 \end{cases} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{2}{3}, y=\frac{10}{3}\right\}\right\}$$

◀ **Figura 5**

Il grafico (figura 6)

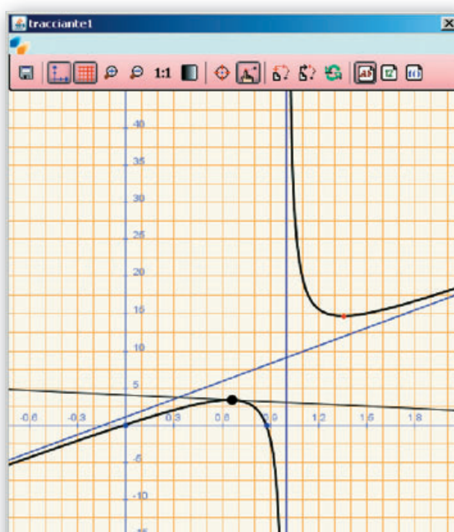
- Per tracciare il grafico di uno degli integrali particolari usiamo il comando *rappresentare*. Il comando *rappresentare* mostra, oltre al grafico della funzione, i suoi elementi notevoli, come le intersezioni con gli assi cartesiani, gli asintoti e gli estremanti locali.
- Per tracciare il grafico della retta e del punto di tangenza impostiamo il comando *tracciare*.

$$\text{rappresentare}\left(\frac{8\cdot x^2-7\cdot x}{x-1}, x\right) \rightarrow \text{tracciante1}$$

$$\text{tracciare}(\{\text{punto}(2/3, 10/3), -x+4\}, \{\text{dimensione\_punto} = 10\}) \rightarrow \text{tracciante1}$$

◀ **Figura 6**

- Facciamo clic sul pulsante *Calcola*, ricavando un grafico (figura 7), dove osserviamo la retta data, il punto di tangenza e l'andamento dell'integrale particolare con le sue caratteristiche notevoli: gli asintoti, i punti di massimo e di minimo e le intersezioni con gli assi cartesiani.



▲ **Figura 7** Il grafico.

- Possiamo operare in modo simile per l'altro integrale particolare.

Esercitazioni

Con Wiris:

- **risolvi le seguenti equazioni differenziali,**
- **determina l'integrale particolare avente la caratteristica indicata,**
- **verifica che l'integrale particolare trovato soddisfi l'equazione differenziale,**
- **opera diffusamente per controllare che l'integrale rispetti la condizione richiesta sia con calcoli analitici sia con rappresentazioni grafiche.**

1 $xy' - y = 1$, sia tangente alla curva di equazione $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3)$. $\left[y = \frac{2}{3}x - 1\right]$

2 $(x^2 + 1)y' + xy = \frac{1}{x^2 + 1}$, abbia un minimo nel punto M di ascissa -1. $\left[y = \frac{x}{x^2 + 1}\right]$

3 $y' = \frac{2}{x}y = \frac{x - 2}{x}$, formi con la retta $y = 1$ una superficie finita di piano di area $\frac{8}{3}$. $\left[y = \frac{(x - 2)^2}{4}\right]$

4 $\frac{y'}{y^2} = \frac{x + 1}{(x - 1)^3}$, ammetta l'asintoto obliquo di equazione $y = x - 2$. $\left[y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}\right]$

5 $y' + y = e^{-x}$, abbia un flesso nel punto F di ascissa 3. $[y = (x - 1)e^{-x}]$

6 $y'' + y' = -6x^2 - 6x + 6$, abbia un massimo nel punto $M(1; 2)$. $[y = -2x^3 + 3x^2 + 1]$