LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI

Le funzioni

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione $f(x) = \sqrt{ax + b}$, con $a \neq 0$, con Excel costruiamo un foglio elettronico che:
- **legga i valori dei coefficienti a e b;**
- **stabilisca il dominio della funzione corrispondente;**
- **determini le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani del grafico della funzione;**
- **tracci il grafico della funzione.**

Per ricavare il grafico il foglio deve:
- **leggere gli estremi x_1 e x_2 di un intervallo I;**
- **controllare che I appartenga al dominio della funzione;**
- **caricare una tabella con i valori di x variabili in I con i corrispondenti valori della funzione.**

Proviamo il foglio ponendo $a = -1$ e $b = 2$ e scegliendo per il grafico di f l'intervallo $[-3; 2]$.

L'analisi del problema

Osserviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{ax + b} - 2$, con $a \neq 0$, è una funzione irrazionale.
Il dominio della funzione è dato dai valori di x per cui si ha $ax + b \geq 0$, ossia:

$$D\text{: se } a > 0,\ x \geq -\frac{b}{a}; \qquad \text{se } a < 0,\ x \leq -\frac{b}{a}.$$

Se $b \geq 0$, l'intersezione con l'asse y è in $(0; \sqrt{b} - 2)$, altrimenti non esiste.

Risolvendo l'equazione irrazionale $\sqrt{ax + b} - 2 = 0$, otteniamo $x = \frac{4 - b}{a}$. Facciamo la verifica $\sqrt{a\frac{4 - b}{a} + b} - 2 = 0$, che, essendo soddisfatta, ci permette di dire che l'intersezione con l'asse x esiste sempre e le sue coordinate sono date da $\left(\frac{4 - b}{a}; 0\right)$.

La costruzione del foglio

- Scriviamo i testi e mettiamo dei bordi alle celle B4 e B6, per indicare dove immettere i valori dei coefficienti a e b, come vediamo in figura 1.
- Scriviamo i titoli per leggere i risultati, unendo due celle con il bottone *Unisci e Centra*, come vediamo in figura 1.
- Controlliamo il coefficiente a, digitando in B5 la formula = SE(B4 = 0; "Il dato non è accettabile"; ""), che segnala il valore 0 per a o lascia la cella vuota.
- Per mostrare il dominio, digitiamo = SE(B4 > 0; "x ≥ "; "x ≤ ") in A9 e = − B6/B4 in B9.
- Per ricavare l'intersezione del grafico con l'asse x, digitiamo per l'ascissa = (4 − B6)/B4 in A12 e per l'ordinata 0 in B12.
- Determiniamo l'eventuale intersezione con l'asse y digitando per l'ascissa = SE(B6 < 0; "non esiste"; 0) in A15 e per l'ordinata = SE(B6 < 0; ""; RADQ(B6) − 2) in B15.
- Facciamo operare il foglio digitando i dati consigliati per a e per b, −1 in B4 e 2 in B6 (figura 1).

	A	B
1	f(x) = RADQ(a*x + b) - 2	
2		
3	I valori dei coefficienti	
4	a =	-1,0000
5		
6	b =	2,0000
7		
8	Il dominio	
9	x ≤	2,0000
10		
11	L'intersezione con l'asse x	
12	-2,0000	0,0000
13		
14	L'intersezione con l'asse y	
15	0,0000	-0,5858

▶ **Figura 1** Il foglio con i risultati del caso proposto dal problema.

La tabella per il grafico

• Inseriamo nel foglio i titoli e le intestazioni della tabella necessaria per ricavare il grafico della funzione e mettiamo dei bordi alle celle F2 e F3, per indicare dove inserire gli estremi dell'intervallo di variazione della x, come vediamo in figura 2.

• Controlliamo l'appartenenza dell'intervallo scelto al dominio della funzione e, in caso affermativo, calcoliamo l'incremento della x digitando in F6 la formula = SE(F3 < = F2; "L'estremo inferiore di I non è minore dell'estremo superiore"; SE(O(E(B4 > 0; F2 < B9); E(B4 < 0; F3 > B9)); "I non appartiene al dominio della funzione"; (F3 − F2)/10)).

• Per ottenere i valori di x digitiamo = F2 in E10, = E10 + F6 in E11 e la copiamo fino alla E20.

• Ricaviamo i valori della funzione, scrivendo la formula = RADQ (B4*E10 + B6) − 2 in F10 e copiandola fino alla F20.

• Immettiamo − 3 in F2 e 2 in F3 ricavando la tabella con le coordinate dei punti del grafico di $f(x)$ (figura 2).

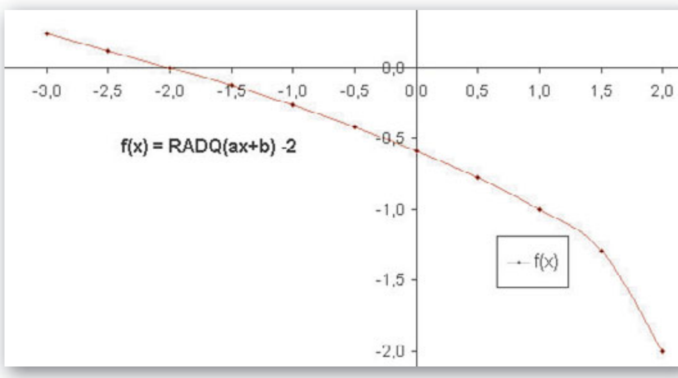
	E	F
1	Gli estremi dell'intervallo I	
2	x1 =	-3,0000
3	x2 =	2,0000
4		
5	L'incremento della x	
6	deltax =	0,5000
7		
8	La tabella per il grafico	
9	x	f(x)
10	-3,0000	0,2361
11	-2,5000	0,1213
12	-2,0000	0,0000
13	-1,5000	-0,1292
14	-1,0000	-0,2679
15	-0,5000	-0,4189
16	0,0000	-0,5858
17	0,5000	-0,7753
18	1,0000	-1,0000
19	1,5000	-1,2929
20	2,0000	-2,0000

▲ **Figura 2** La tabella per il grafico della funzione.

Il grafico

• Per realizzare il grafico evidenziamo la zona E9:F20 e diamo il comando *Inserisci_Grafico*. Nella prima finestra di dialogo scegliamo il tipo *Dispers*(XY) e il sottotipo *Dispersione con coordinate unite da linee smussate*. Nella seconda confermiamo le proposte di Excel. Nella terza assegniamo un titolo al grafico f(x) = RADQ(a*x + b) − 2 e togliamo la griglia. Nella quarta scegliamo di creare un nuovo foglio grafico.

• Dopo che Excel ha realizzato il grafico, togliamo il colore allo sfondo, sostituiamo il colore della linea e degli indicatori dei punti con il colore rosso e spostiamo con il mouse la legenda dentro al grafico. Al termine delle variazioni vediamo il grafico di figura 3.



► **Figura 3** Il grafico della funzione nell'intervallo [− 3; 2].

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti funzioni determina, con l'aiuto del computer, i coefficienti *a* e *b* in modo che i punti *C* e *D* appartengano al grafico della funzione. Rappresenta tale grafico.

1 $f(x) = \dfrac{2}{ax + b}$, $C(-2; -2)$ e $D(1; 1)$. [1, 1]

2 $f(x) = a - \sqrt{x + b}$, $C(0; 1)$ e $D(8; -1)$ [2, 1]

Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni *f* e *g* costruisci con il computer due tabelle con tre colonne ciascuna. Prima tabella: alcuni valori della x, i corrispondenti valori della *f* e della $g \circ f$; seconda tabella: alcuni valori della x, i corrispondenti valori della *g* e della $f \circ g$. Traccia inoltre, in un riferimento cartesiano, i grafici di *f* e di $g \circ f$ e, in un altro, quelli di *g* e di $f \circ g$.

Funzioni definite da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$.

3 $f: n \mapsto n^2, \quad g: n \mapsto n + 3.$

4 $f: n \mapsto n^3, \quad g: n \mapsto n^2 + 1.$

Funzioni definite da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$.

5 $f: x \mapsto x - 1, \quad g: x \mapsto x^2 - 4.$

6 $f: x \mapsto x^3 - 8, \quad g: x \mapsto |2x - 2|.$

Funzioni definite da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

7 $f: x \mapsto \frac{1}{4}x - 4, \quad g: x \mapsto \frac{2}{x-1}.$

8 $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x}, \quad g: x \mapsto 2x - 1.$

9 $f: x \mapsto \frac{x-2}{4}, \quad g: x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}.$

10 $f: x \mapsto x^3, \quad g: x \mapsto \frac{2}{5x-4}.$

Funzioni definite da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Esamina solo la funzione composta $g \circ f$.

11 $f: n \mapsto n^2 + 1, \quad g: n \mapsto \frac{n}{n+1}.$

12 $f: n \mapsto n^3 + 1, \quad g: n \mapsto \frac{1}{n+4}.$

Per ognuna delle seguenti funzioni *f* realizza con il computer i grafici della *f* e della funzione inversa. Se necessario, opera degli opportuni restringimenti dell'insieme di partenza della *f*. Evidenzia la simmetria dei due grafici rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

13 $f: x \mapsto 2x + 2$

14 $f: x \mapsto x^2$, con $x \geq 0$.

15 $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$, con $x > 0$.

16 $f: x \mapsto \frac{1}{x-2}$, con $x \neq 2$.

17 $f: x \mapsto x^3$

18 $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, con $x \neq 0$.

Le funzioni e le trasformazioni geometriche

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive, per osservare la dilatazione verticale, consideriamo la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

e rappresentiamo i grafici di $f(x)$ e della funzione dilatata $2 \cdot f(x)$, secondo il fattore 2.
Per osservare la contrazione verticale, operiamo in modo analogo con la $f(x)$ e con la sua contratta $\frac{1}{2} \cdot f(x)$, secondo il fattore $\frac{1}{2}$.

La funzione e le due trasformate

• Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione*, digitiamo nella riga di editazione delle espressioni la funzione − 1/4 * x^2 + 2*x e con OK la inseriamo nell'etichetta #1 (figura 1).
• Battiamo F4 importando l'espressione dalla zona algebrica alla riga di editazione delle espressioni fra parentesi, a fianco scriviamo * 2 e facciamo clic sul secondo bottone a sinistra della riga di editazione delle espressioni (quello con un uguale) inserendola nella #2 semplificata.
• Operiamo in modo analogo per ottenere nella #3 la funzione divisa per 2 e semplificata.

$$\#1: \quad -\frac{1}{4}\cdot x^2 + 2\cdot x$$

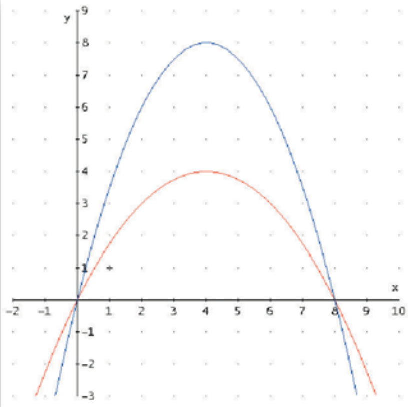
$$\#2: \quad \frac{x\cdot(8-x)}{2}$$

$$\#3: \quad \frac{x\cdot(8-x)}{8}$$

▲ **Figura 1** Le funzioni.

La prima rappresentazione grafica

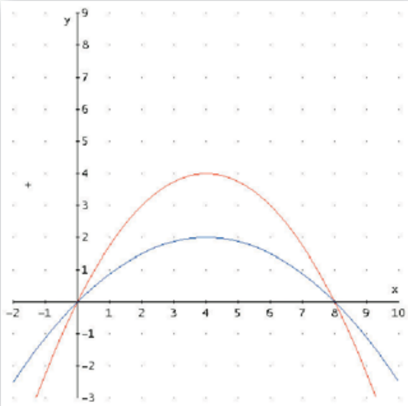
• Evidenziamo la #1, entriamo in ambiente grafico, facciamo clic sul bottone *Finestra_Grafica 2D*.
• Per tracciare in rosso il grafico di $f(x)$, usiamo *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo il segnalibro *Colore* e nella tavolozza *Colore successivo* facciamo clic sul colore rosso. Diamo quindi *Traccia il grafico*.
• Torniamo in algebra con il relativo bottone, evidenziamo la #2, passiamo in grafica, dove scegliamo il colore blu e diamo *Traccia il grafico*.
• Inquadriamo le due curve con *Imposta_Intervallo del Grafico*, selezioniamo *Massimo/minimo*, nella cui finestra di dialogo scegliamo − 2 (il minimo), 8 (il massimo) e 10 (il numero delle tacche) per l'asse orizzontale e − 3, 9 e 12 per l'asse verticale.
• Di solito il riferimento cartesiano che appare sullo schermo è *dimetrico*, ossia con due unità di misura diverse per i due assi. Per rendere il sistema *monometrico*, diamo *Imposta_Rapporto di aspetto* e, nella finestra di dialogo, facciamo clic su *Resetta*. Osserviamo in figura 2 l'andamento del grafico di $f(x)$ in rosso e quello della sua dilatata in blu.



▲ **Figura 2** La dilatazione.

La seconda rappresentazione grafica

• Operiamo analogamente in un altro grafico per ottenere i grafici di $f(x)$ e di $\frac{1}{2}\cdot f(x)$.
• Osserviamo in figura 3 l'andamento del grafico di $f(x)$ in rosso e quello della sua contratta in blu.



▲ **Figura 3** La contrazione.

Esercitazioni

Usa il computer per svolgere i seguenti esercizi.

Le traslazioni

1 Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = 2 + \ln x$ secondo un vettore parallelo all'asse y e lungo 2. Traccia il grafico della funzione e della sua traslata.
Copia i grafici su un quaderno. Congiungi i punti del grafico di $f(x)$, di ascisse 1, e, e^2, con i rispettivi punti corrispondenti del grafico della funzione traslata.

2 Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = -x^2 - 1$ secondo un vettore parallelo all'asse x e lungo 3. Traccia il grafico della funzione e della sua traslata.
Centra i grafici, stampali, sul foglio stampato evidenzia con la matita i punti del grafico di $f(x)$ rispettivamente di ascissa -1, 0, 1, 2, e congiungili con i corrispondenti punti del grafico della funzione traslata.

3 Trasla la funzione $f(x) = x^2$ secondo un vettore $\vec{u}(1; -2)$, poi trasla la funzione ottenuta di un vettore $\vec{v}(3; 5)$.
Scambia l'ordine dell'applicazione delle due traslazioni, traccia e centra i grafici delle funzioni e delle sue traslate. Alla fine osserva il risultato ottenuto.

4 Ricava l'equazione della funzione traslata di $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ secondo il vettore $\vec{v}(-2; -1)$.
Traccia i due grafici, centrali e stampali.

Le simmetrie

5 Inserisci la funzione

$$f(x) = \sqrt{4x + 4},$$

costruisci la simmetrica rispetto all'asse y e traccia i due grafici. Indica il dominio delle due funzioni.
Copia i due grafici sul quaderno e congiungi con un righello e con una matita i punti del grafico della funzione $f(x)$, rispettivamente di ascissa $-\frac{3}{4}$, 0, $\frac{5}{4}$, con i punti corrispondenti nel grafico della funzione simmetrica.

6 Inserisci la funzione

$$f(x) = \ln\left(-\frac{3}{2}x + 4\right),$$

costruisci la sua simmetrica rispetto all'origine e traccia i due grafici. Indica il dominio delle due funzioni.
Centra i grafici e stampali.
Sul foglio stampato congiungi con un righello e con una matita i punti del grafico della funzione $f(x)$, rispettivamente di ascissa -2, -1, 0, 1, 2, con i punti simmetrici rispetto all'origine.

7 Per ognuna delle seguenti funzioni, esegui i seguenti passi: inserisci la funzione, determina le simmetriche rispettivamente rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine. Traccia i quattro grafici, centrali nello schermo, stampali e sul foglio stampato congiungi almeno tre punti simmetrici.

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 3}}; \quad t(x) = \sqrt{-\frac{5}{2}x + \frac{7}{4}}; \quad s(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 1}.$$

Le dilatazioni e le contrazioni

8 Nel medesimo riferimento cartesiano, traccia i grafici della funzione $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ e delle sue trasformate ottenute moltiplicando la funzione rispettivamente per 2, per 3 e per 4.
Centra e stampa i grafici ottenuti. Che tipo di trasformazioni hai ottenuto?

9 Nel medesimo riferimento cartesiano, traccia i grafici della funzione $f(x) = \ln(x + 1)$ e della sua trasformata, ottenuta moltiplicando rispettivamente la $f(x)$ per 10 e la x per 2. Copia sul quaderno i due grafici. Trova le intersezioni fra le due curve.

10 Data la funzione $f(x) = \cos x$, moltiplicala per k, assegna a k i valori 2, 3, 4 e traccia tutti i grafici. Stampali e osserva le dilatazioni verticali avvenute.