LABORATORIO DI MATEMATICA
IL PIANO CARTESIANO E LA RETTA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive determiniamo l'equazione della retta p passante per il punto $P(-1; 1)$ e perpendicolare alla retta r, passante per i punti $Q(-1; 3)$ e $R(2; -3)$.
Tracciamo poi il grafico delle rette e dei punti, corredato da didascalie.

Il percorso risolutivo

Determiniamo la retta r con la formula della retta passante per due punti, applicata ai punti dati Q e R. Determiniamo la retta p con la formula della retta passante per un punto. In essa inseriamo le coordinate del punto assegnato P e imponiamo la condizione di perpendicolarità con la retta r appena trovata.

La sessione di lavoro

• Diamo *Inserisci_Testo* per scrivere, nel riquadro che appare, il titolo del lavoro: Un problema sulle rette (figura 1).
• Scegliamo *Parola* nel campo *Nome* delle variabili di *Opzione_Modalità Imput*.
• Diamo *Crea_Espressione* e nella riga di editazione scriviamo la formula della retta passante per due punti y = (y2 − y1)/(x2 − x1) * (x − x1) + y1.
• Con INVIO la inseriamo nell'etichetta #1.
• Applichiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili.* Nella corrispondente finestra di dialogo ignoriamo la proposta di sostituzione di x e di y, digitiamo − 1 nel campo di sostituzione di x_1, 2 in quello di x_2, 3 in quello di y_1 e − 3 in quello di y_2.
• Usciamo dalla finestra di dialogo con un clic su *Semplifica*, ottenendo nella #2 l'equazione della retta r.
• Con *Crea_Espressione* scriviamo la formula della retta passante per un punto, con la condizione di perpendicolarità con un'altra retta: y = − 1/m * (x − x0) + y0.
• Con INVIO la inseriamo nell'etichetta #3.
• Diamo *Semplifica_Sostituisci variabili* per sostituire − 1 a x_0, 1 a y_0 e − 2 a m, il coefficiente di x della retta r, che leggiamo nell'etichetta #2.
• Usciamo dalla finestra di dialogo con un clic su *Semplifica*, ottenendo nella #4 l'equazione della retta p.

Un problema sulle rette

#1: $y = \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}\cdot(x - x1) + y1$

#2: $y = 1 - 2\cdot x$

#3: $y = -\dfrac{1}{m}\cdot(x - x0) + y0$

#4: $y = \dfrac{x + 3}{2}$

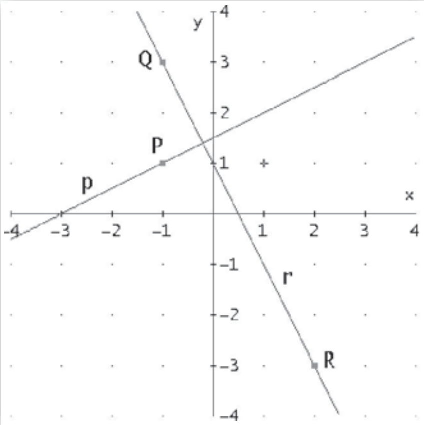
◀ **Figura 1** La sessione di lavoro.

Il grafico

• Realizziamo il grafico della retta r, facendo clic di seguito sull'etichetta #2, che contiene l'equazione della r, sul bottone *Finestra_Grafica 2D*, entrando in ambiente grafico, e sul bottone *Traccia il grafico*.

▶▶

• Operiamo similmente per la retta p, la cui equazione si trova nella #4.
• Per rappresentare i punti P, Q e R nel piano cartesiano, immettiamo nella zona algebrica le loro coordinate, scrivendole nella riga di editazione [[− 1, 1], [− 1, 3], [2, − 3]] e battendo INVIO.
• Entriamo in ambiente grafico e, prima di fare clic su *Traccia il grafico*, applichiamo il comando *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo *Punti*, aprendo una finestra di dialogo, dove nel campo *Collega* scegliamo *No*.
• Con un clic poniamo la croce immediatamente a sinistra di dove desideriamo scrivere il nome del punto P. Diamo *Inserisci_Annotazione* e, nella finestra di dialogo che otteniamo, digitiamo il nome ed eventualmente indichiamo al sistema di variarne le dimensioni stabilite per default.
• Operiamo similmente per gli altri due punti e per le due rette.
• Per cancellare un'annotazione, prima la evidenziamo con la croce, poi usiamo *Modifica_Cancella annotazione*.
• Di solito il riferimento cartesiano che appare sullo schermo è dimetrico, ossia con due unità di misura diverse per i due assi. Per rendere il sistema monometrico e quindi vedere la perpendicolarità delle due rette, diamo *Imposta_Rapporto di aspetto* e, nella finestra di dialogo, facciamo clic su *Resetta*, ricavando il grafico di figura 2.



◄ **Figura 2** Il grafico delle rette r e p e dei punti P, Q e R in un riferimento cartesiano monometrico.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive, troviamo il punto P, estremo del segmento PQ, sapendo che:

• **il punto Q è l'intersezione fra la retta p di equazione $y = \frac{1}{2}x + 6$ e la retta s passante per $S(1; -1)$ e perpendicolare a p;**
• **il punto M, punto medio di PQ, è l'intersezione con l'asse x della retta r di equazione $y = -\frac{4}{5}x + 2$.**

Tracciamo poi il grafico relativo al problema.

Scriviamo il percorso risolutivo

1. Determiniamo l'equazione della retta s come retta che passa per un punto ed è perpendicolare a un'altra retta.
2. Troviamo le coordinate di Q risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette p e s.
3. Troviamo le coordinate di M determinando l'intersezione della retta r con l'asse x.
4. Determiniamo le coordinate del punto P applicando la formula del punto medio.

Inseriamo un titolo e i dati del problema

• Diamo *Inserisci_Testo* per scrivere il titolo del lavoro: Un problema sulle rette (figura 1).

• Per immettere le equazioni delle rette p e r e le coordinate del punto S, usiamo tre volte *Crea_Espressione*, digitando rispettivamente
y = 1/2 * x + 6,
y = − 4/5*x + 2,
[1, − 1]
e confermando ogni volta con OK.

Un problema sulle rette

#1: $y = \frac{1}{2}\cdot x + 6$

#2: $y = -\frac{4}{5}\cdot x + 2$

#3: [1, -1]

▲ **Figura 1** I dati del problema.

Troviamo l'equazione della retta *s*

Poiché qui dobbiamo usare delle lettere indicizzate, stabiliamo che le variabili possano essere costituite da più di un carattere. Per tale motivo, diamo il comando *Opzioni_Modalità*, apriamo la finestra *Input*, dove selezioniamo *Parola*. Derive ci ricorda la nostra scelta con un messaggio nella #4 (figura 2).

• Per trovare l'equazione della retta s, digitiamo e inseriamo nella #5 l'equazione generica di una retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data: y = − 1/m*(x − x0) + y.

• Applichiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Nella corrispondente finestra di dialogo compaiono tutte le variabili contenute nella #5, ignoriamo la proposta di sostituzione di x e di y, digitiamo 1 nel campo di sostituzione di x_0, − 1 in quello di y_0, 1/2 (il coefficiente angolare di p) in quello di m_1.

• Usciamo con un clic su *Semplifica*, ottenendo l'equazione della retta s nella #6.

#4: InputMode := Word

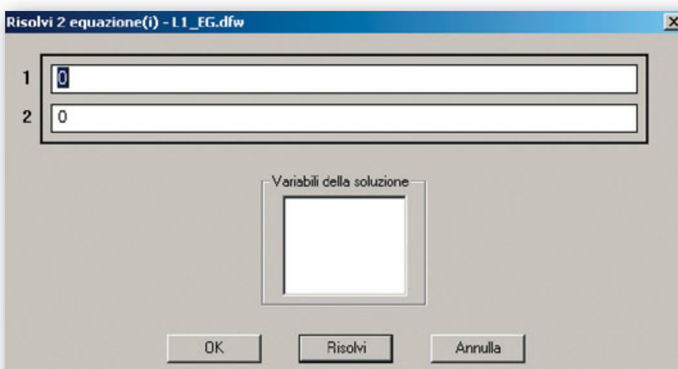
#5: $y = \left(-\frac{1}{m1}\right)\cdot(x - x0) + y0$

#6: $y = 1 - 2\cdot x$

▲ **Figura 2** L'equazione della retta *s*.

Troviamo le coordinate del punto *Q*

• Per trovare le coordinate del punto Q, mettiamo a sistema le equazioni delle rette p e s, usando il comando *Risolvi_Sistema*. Con la prima finestra di dialogo indichiamo a Derive che il sistema è formato da due equazioni. Nella seconda (figura 3) immettiamo nella prima riga l'equazione della retta p. Per far ciò evidenziamo con un clic l'etichetta #1, facciamo clic nel campo della prima equazione e battiamo il tasto F3.



▲ **Figura 3** La finestra di *Risolvi_Sistema*.

• In modo analogo inseriamo la seconda equazione, quella della s, contenuta nella #6. Nel campo sottostante indichiamo che le variabili sono x e y e usciamo con *Semplifica*. Nella #7 compare l'impostazione del sistema (figura 4) e nella #8 la sua soluzione, le coordinate di Q.

#7: $\text{SOLVE}\left(\left[y = \frac{1}{2}\cdot x + 6,\ y = 1 - 2\cdot x\right], [x, y]\right)$

#8: $[x = -2 \wedge y = 5]$

◄ **Figura 4** Le coordinate del punto *Q*.

Determiniamo le coordinate del punto *M*

- Per trovare il punto M evidenziamo l'etichetta #2, contenente l'equazione della retta r, e applichiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Ignoriamo la proposta di sostituzione della x e alla variabile y sostituiamo 0. Con OK otteniamo l'etichetta #9 (figura 5).
- Facciamo clic su *Risolvi_Espressione* e poi su *Semplifica*, nella #11 appare l'ascissa di M.
- Digitiamo poi [5/2, 0] per vedere nella #12 le coordinate di M.

#9: $0 = -\frac{4}{5}\cdot x + 2$

#10: $\text{SOLVE}\left(0 = -\frac{4}{5}\cdot x + 2,\ x\right)$

#11: $x = \frac{5}{2}$

#12: $\left[\frac{5}{2},\ 0\right]$

▲ **Figura 5** Le coordinate del punto *M*.

Determiniamo le coordinate del punto *P*

- Inseriamo nella zona algebrica le formule del punto medio di un segmento: digitiamo e inseriamo nella #13: [xm = (x1 + x2)/2, ym = (y1 + y2)/2] (figura 6).
- Usiamo il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*, digitiamo − 2 nel campo di sostituzione di x_1, 5/2 in quello di x_M, 5 in quello di y_1 e 0 in quello di y_M e ignoriamo la proposta di sostituzione di x_2 e di y_2.
- Usciamo dalla finestra di dialogo con *Semplifica*. Nella #15 vediamo le coordinate del punto P.

#13: $\left[xm = \frac{x1 + x2}{2},\ ym = \frac{y1 + y2}{2}\right]$

#14: $\left[\frac{5}{2} = \frac{-2 + x2}{2},\ 0 = \frac{5 + y2}{2}\right]$

#15: $[x2 = 7,\ y2 = -5]$

#16: $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

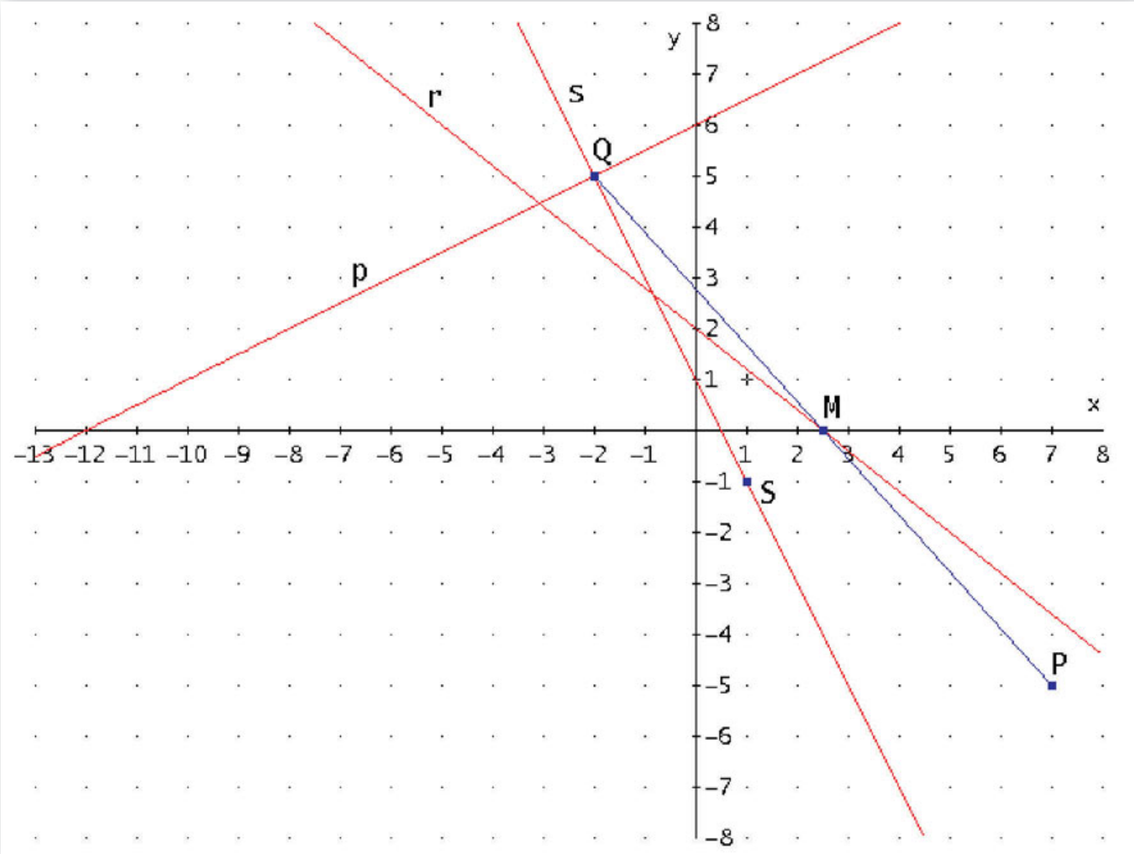
◄ **Figura 6** Le coordinate del punto *P*.

- A conclusione del problema e per il grafico successivo inseriamo nella #16 gli estremi noti del segmento PQ, digitando nella riga di editazione la matrice [[− 2, 5], [7, − 5]] con le coordinate trovate di Q e di P.

Tracciamo il grafico

Per costruire il grafico richiesto sfruttiamo gli strumenti grafici di Derive.
Aggiungiamo alcune indicazioni:

- Per ottenere il segmento PQ prima di fare clic su *Traccia il grafico*, applichiamo il comando *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo *Punti*, aprendo una finestra di dialogo, dove nel campo *Collega* scegliamo *Sì*.
- Per inquadrare la zona del piano cartesiano che contiene gli elementi del problema, usiamo *Imposta_Intervallo del Grafico* e selezioniamo *Massimo/minimo*, dove scegliamo − 13 (il minimo), 8 (il massimo) e 21 (il numero delle tacche) per l'asse orizzontale e − 8, 8 e 16 per l'asse verticale.
- Per rendere il sistema monometrico e quindi vedere la perpendicolarità delle rette p e s, diamo *Imposta_Rapporto di aspetto* e, nella finestra di dialogo, facciamo clic su *Resetta*.
- Per scrivere nel piano cartesiano i nomi dei punti e delle rette usiamo il comando *Inserisci_Annotazione*, posizionando la croce nel punto che desideriamo sia l'angolo in alto a sinistra del testo da inserire. Eventualmente con *Modifica_Annotazione* indichiamo al sistema di variarne le dimensioni, stabilite per default.
- Per cancellare un'annotazione, prima la evidenziamo con la croce, poi usiamo *Modifica_Cancella annotazione*.
- Al termine delle operazioni vediamo il grafico di figura 7.



▲ **Figura 7** Il grafico completo in un riferimento cartesiano monometrico.

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi con l'aiuto del computer e traccia il grafico relativo.

1 Determina le coordinate dei vertici A e B e l'area del triangolo, noti il vertice $C(6; 4)$ e le rette di equazioni $x + 3y - 5 = 0$ e $7x + 2y - 24 = 0$, sulle quali stanno rispettivamente le altezze AH e BK del triangolo.

$[A(-1; 2), B(4; -2); S = 19]$

2 Determina le equazioni delle mediane e le coordinate del baricentro del triangolo ABC, i cui lati stanno sulle rette di equazioni: AB: $y = -x + 2$, AC: $y = \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}$, BC: $y = \frac{3}{8}x - \frac{23}{16}$.

$\left[y = \frac{9}{13}x - \frac{25}{26}; y = -\frac{1}{2}; y = \frac{9}{2}x - \frac{7}{2}; \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

3 Determina le equazioni degli assi e le coordinate del circocentro del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate: $A(-1; 5)$, $B(3; -3)$, $C(0; -3)$.

$\left[y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; y = \frac{1}{8}x + \frac{17}{16}; x = \frac{3}{2}; \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)\right]$

4 Determina le equazioni delle altezze e le coordinate dell'ortocentro del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate: $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -4)$.

$\left[y = -\frac{3}{7}x - \frac{11}{7}; y = -x + 5; y = -\frac{1}{5}x - \frac{21}{5}; \left(\frac{23}{2}; -\frac{13}{2}\right)\right]$

5 Trova le equazioni delle bisettrici e le coordinate dell'incentro del triangolo i cui lati stanno sulle rette di equazioni: $y = -\frac{5}{2}x + 8$, $y = \frac{2}{5}x + 1$, $y = \frac{5}{2}x + 1$. $\left[y = x + 1;\ x = \frac{7}{5};\ y = -\frac{3}{7}x + 3;\ \left(\frac{7}{5};\ \frac{12}{5}\right)\right]$

6 Trova le coordinate del punto P appartenente alla retta $y = -2x + 1$ e distante $\sqrt{5}$ dal punto $D(-2; 1)$. $\left[P(-1; 3) \vee P\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)\right]$

7 Trova le coordinate del vertice C del triangolo ABC, sapendo che i lati AB e AC stanno rispettivamente sulle rette di equazioni $y = 2x - 2$ e $y = -x + 1$, l'ascissa di B vale 4 e l'area del triangolo vale 9. $[C(3; -2) \vee C(-1; 2)]$

8 Determina l'equazione della retta passante per $S(1; 1)$ e distante $\frac{\sqrt{2}}{2}$ da $R(2; 3)$. $[y = x \vee y = 7x - 6]$

9 Determina le coordinate dei vertici del triangolo ABC, note le equazioni delle rette $y = 5x - 7$ e $y = x - 3$, che contengono rispettivamente i lati AB e AC, la lunghezza $\sqrt{58}$ del lato BC e le coordinate $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ del punto medio M del lato BC. $[A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -4)]$

10 Determina le coordinate del rettangolo $ABCD$, sapendo che la diagonale AC appartiene alla retta di equazione $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, il punto medio M di AC ha coordinate $(-2; -1)$, il lato BC appartiene alla retta di equazione $y = -x + 4$. $[A(-5; -5), B(2; 2), C(1; 3), D(-6; -4)]$

11 Determina la distanza del punto P dal punto Q, sapendo che P è l'intersezione fra la retta r di equazione $y = x + 3$ e la retta s di equazione $y = -2x - 3$ e Q l'intersezione fra la retta t di equazione $y = 9$ e la retta z, che passa per $A(-6; -1)$ ed è parallela a r. $[\overline{PQ} = 10]$

12 Determina le coordinate dell'estremo P del segmento PQ, sapendo che l'altro estremo Q ha coordinate $(3; -4)$ e che il punto medio M di PQ è il punto di intersezione fra la retta u di equazione $y = -x + 1$ e la retta v, che passa per $S(3; 0)$ ed è perpendicolare alla retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x$. $[P(7; -4)]$

13 Determina le coordinate dell'estremo B del segmento AB, sapendo che:

a) il suo punto medio M è il punto di intersezione fra la retta u di equazione $y = -x + 1$ e la retta v, che passa per $P(0; 3)$ ed è parallela alla retta r di equazione $y = -2x$;
b) l'altro estremo A ha coordinate $(-2; -3)$. $[B(6; 1)]$

14 Trova l'equazione della retta r passante per $P(1; -2)$ e parallela alla retta s, che passa per $A(1; 4)$ e per B, punto di intersezione fra le rette u di equazione $y = -x + 2$ e v di equazione $y = x - 4$. $\left[r\!: y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right]$

15 Trova l'equazione della retta r, sapendo che:

a) passa per il punto P, intersezione fra la retta u di equazione $y = x + 1$ e la retta v, che passa per $V(0; 7)$ ed è perpendicolare alla retta s di equazione $y = \frac{1}{2}x$;
b) è parallela alla retta s. $\left[r\!: y = \frac{1}{2}x + 2\right]$

16 Trova la distanza fra le rette parallele r e s, sapendo che r passa per $A(0; 5)$ e per B, punto di intersezione fra le rette u di equazione $y = -x - 1$ e v di equazione $x = -2$, e che s passa per l'origine. $[d = \sqrt{5}]$

17 Trova due punti, B e C, sull'asse x, sapendo che la loro distanza dal punto $A(-2; 0)$ è doppia rispetto alla loro distanza dal punto $P\left(\frac{9}{2}; 2\right)$. $\left[B(3; 0), C\left(\frac{31}{3}; 0\right)\right]$

18 L'ascissa di due punti, D ed E, è 2. Determina le loro ordinate, sapendo che distano $2\sqrt{2}$ dalla retta r di equazione $y = -x + 4$. [$D(2; -2)$, $E(2; 6)$]

19 L'ordinata di due punti, F e G, è 7. Determina le loro ascisse, sapendo che distano $\sqrt{41}$ dal punto $U(3; 2)$. [$F(-1; 7)$, $G(7; 7)$]

20 Determina le coordinate del vertice P del triangolo PQR, conoscendo le coordinate del vertice $Q(2; 7)$ e di $M(-1; 3)$ punto medio del lato QR, la misura 10 del lato RP e la retta del lato QP di equazione $y = -x + 9$. [$P(4; 5)$]

21 Trova l'area del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 5)$. [$S = 15$]

22 Trova l'area del triangolo PQR, i cui vertici hanno coordinate $P(2; 4)$, $Q(-4; 3)$, $R(-2; -3)$. [$S = 19$]

23 Trova l'area del triangolo ABC, i cui lati hanno equazioni AB: $y=2x-1$, AC: $y=-x+2$, BC: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$. [$S = 6$]

24 Determina le coordinate del vertice C di un triangolo isoscele, sapendo che l'area S è 12 e che la base ha estremi nei punti $A(-2; 3)$ e $B(2; -1)$. [$C_1(-3; -2)$, $C_2(3; 4)$]

25 Trova le coordinate di un punto C, sapendo che si trova sull'asse y, che l'area del triangolo ABC è 3 e che le coordinate dei vertici sono $A(-2; 1)$ e $B(2; -2)$. [$C_1(0; -2)$, $C_2(0; 1)$]

26 Trova le coordinate di un punto Q, sapendo che si trova sulla retta r di equazione $y = 2x - 1$, che l'area del triangolo PQR è $\frac{7}{4}$ e che le coordinate degli altri due vertici sono $P(0; 2)$ e $R\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. [$Q_1(1; 1)$, $Q_2(8; 15)$]

I fasci di rette

Nei seguenti fasci di rette, trova con l'aiuto del computer l'eventuale centro C e determina le rette, attraverso il valore del parametro k, che soddisfano le condizioni indicate. Verifica poi che esse soddisfano le proprietà imposte. Tracciane il grafico.

27 $y = kx - 2k + 4$;

a) parallela all'asse x;
b) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 18;
c) formanti con gli assi cartesiani un triangolo isoscele.

[$C(2; 4)$; a) $k = 0$: $y = 4$; b) $k = -1$: $y = -x + 6$; $k = -4$: $y = -4x + 12$; c) $k = -1$: $y = -x + 6$; $k = 1$: $y = x + 2$]

28 $y = (k + 1)x - 4k + 2$;

a) passante per il punto $P(\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$;
b) passante per il punto $(4; 6)$;
c) parallela alla retta $y = \frac{5}{2}x - 1$;
d) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 50.

$\left[C(4; 6);\ \text{a) } k = 1\text{: } y = 2x - 2;\ \text{b) infinite; c) } k = \frac{3}{2}\text{: } y = \frac{5}{2}x - 4;\ \text{d) } k = -2\text{: } y = -x + 10;\ k = 8\text{: } y = 9x - 30;\ k = -\frac{3}{4}\text{: } y = \frac{1}{4}x + 5;\ k = -\frac{13}{4}\text{: } y = -\frac{9}{4}x + 15\right]$

29 $kx + (k+1)y - 2k + 2 = 0$;

a) parallela all'asse y;

b) distante $\frac{\sqrt{10}}{5}$ dall'origine;

c) distante $2\sqrt{5}$ dall'origine;

d) distante 5 dall'origine.

$\left[C(4; -2);\ \text{a) } k = -1\text{: } x = 4;\ \text{b) } k = \frac{1}{2}\text{: } x + 3y + 2 = 0;\ k = \frac{9}{4}\text{: } 9x + 13y - 10 = 0;\ \text{c) } k = -\frac{2}{3}\text{: } 2x - y - 10 = 0;\ \text{d) } \nexists k \in \mathbb{R}\right]$

30 $x + (2k-1)y + k - 4 = 0$;

a) parallela all'asse y;

b) passante per il punto $G\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}; -2\right)$;

c) perpendicolare alla retta $y = -x$;

d) perpendicolare alla retta $y = 2x$;

(Suggerimento. Tieni presente che per vedere la perpendicolarità fra due rette in un sistema di riferimento cartesiano è necessario che esso sia monometrico. Con la grafica di Derive puoi variare le unità di misura della x e della y e, quindi, ottenere che diventino uguali, con i comandi *Imposta_Area* e *Opzioni_Punti Griglia* e con i bottoni degli zoom.)

$\left[C\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right);\ \text{a) } k = \frac{1}{2}\text{: } x = \frac{7}{2};\ \text{b) } k = \frac{2\sqrt{2}-5}{6}\text{: } 6x + 4(\sqrt{2}-4)y + 2\sqrt{2} - 29 = 0;\ \text{c) } k = 0\text{: } x - y - 4 = 0;\ \text{d) } k = \frac{3}{2}\text{: } 2x + 4y - 5 = 0\right]$

31 $x - 2y + 2k - 2 = 0$;

a) passante per l'origine;

b) passante per il punto $E(-2; 2)$;

c) distanti $2\sqrt{5}$ dal punto E;

[Non esiste il centro; a) $k = 1$: $x - 2y = 0$; b) $k = 4$: $x - 2y + 6 = 0$; c) $k = -1$: $x - 2y - 4 = 0$; $k = 9$: $x - 2y + 16 = 0$]

32 $x + y + k - 4 = 0$;

a) formanti con gli assi cartesiani un triangolo di area 8;

b) formanti con la retta $2x - y = 0$ e l'asse y un triangolo di area $\frac{25}{6}$;

c) intersecanti il segmento di estremi $A(2; 1)$ e $B(5; 0)$.

[Non esiste il centro; a) $k = 0$: $x + y - 4 = 0$; $k = 8$: $x + y + 4 = 0$; b) $k = -1$: $x + y - 5 = 0$; $k = 9$: $x + y + 5 = 0$; c) $-1 \leq k \leq 1$]