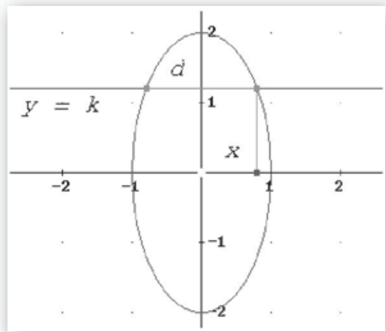
LABORATORIO DI MATEMATICA
L'ELLISSE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo con Derive una funzione che, dato un valore $d \geq 0$, determini l'equazione dell'eventuale retta $y = k$ che intercetta, sulla semiellisse che fa parte dell'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ed è costituita da punti posti al di sopra e sull'asse x, una corda lunga d. Proviamo la funzione con i valori $d = -1, 0, 1, 2$.

L'analisi del problema

Otteniamo l'equazione della semiellisse che sta al di sopra e sull'asse x esplicitando la y dall'equazione dell'ellisse.
Deduciamo dalla figura 1 che l'equazione della retta parallela all'asse y, che stacca sull'ellisse una corda di lunghezza d, si ricava sostituendo a x nell'equazione trovata l'espressione $\frac{d}{2}$.



▲ **Figura 1** L'ellisse e la corda che la retta stacca su di essa.

La sessione di lavoro

• Diamo *Crea_Espressione*, digitiamo nella riga di editazione l'equazione dell'ellisse x^2 + y^2/4 = 1 e la immettiamo nel-l'etichetta #1 (figura 2).

#1: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

#2: $\text{SOLVE}\left(x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ y\right)$

#3: $y = -2\cdot\sqrt{(1 - x^2)} \vee y = 2\cdot\sqrt{(1 - x^2)}$

#4: $y = 2\cdot\sqrt{(1 - x^2)}$

#5: $y = 2\cdot\sqrt{\left(1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)}$

#6: $y = \sqrt{(4 - d^2)}$

◀ **Figura 2** L'equazione della retta in funzione della lunghezza della corda.

```
#7:   Ret_Cor(d) :=
        If d < 0 v d > 2
           "La retta non esiste"
           y = √(4 - d^2)

#8:   Ret_Cor(-1)

#9:   La retta non esiste

#10:  Ret_Cor(0)

#11:  y = 2

#12:  Ret_Cor(1)

#13:  y = √3

#14:  Ret_Cor(2)

#15:  y = 0 v y = 0
```

▶ **Figura 3** La funzione per trovare l'equazione della retta e le sue applicazioni.

• Applichiamo sulla #1 il comando *Risolvi_Espressione*, indichiamo a Derive, attraverso la finestra di dialogo, di considerare come variabile la y.
• Usciamo dalla finestra di dialogo con OK, preparando nella #2 la funzione per esplicitare la y.
• Diamo *Semplifica_Base*, Derive esplicita y e mostra il risultato nella #3.
• Facciamo clic sulla #3, sull'equazione della semiellisse superiore, sulla riga di editazione delle espressioni e battiamo F3, importando l'equazione. Diamo INVIO, immettendola nella #4.
• Usiamo *Semplifica_Sostituisci variabili*, nella finestra di dialogo sostituiamo d/2 a x e usciamo con un clic su *Semplifica*, ricavando nella #6 l'equazione richiesta dal problema.
• Definiamo la funzione tenendo conto che la retta esiste se vengono assegnati dei valori di d compresi fra 0 e 2 e che l'equazione della retta in funzione della lunghezza d si trova nella #6.

Nella riga di editazione, pertanto, scriviamo Ret_Cor(d) := If(d < 0 ∨ d > 2, "La retta non esiste", y = SQRT(4 − d^2)) e la immettiamo nella #7 (figura 3).
• Nella riga di editazione scriviamo Ret_Cor(−1) e battiamo INVIO.
• Sulla #8 usiamo *Semplifica_Base* e leggiamo la risposta nella #9.
• Operiamo similmente per gli altri casi richiesti dal problema e leggiamo le risposte nella #11, nella #13, nella #15.

Esercitazioni

Con il computer risolvi i seguenti problemi e traccia il grafico dei dati e dei risultati.

1 Costruisci, con il computer, una funzione che legga i valori dei coefficienti h e k di un'ellisse di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ e dia in uscita il risultato indicato.
Le intersezioni dell'ellisse con la parabola di equazione $y = x^2 + 4$.
Prova la funzione con $h = \frac{1}{9}$ e $k = \frac{1}{4}$, con $h = \frac{1}{25}$ e $k = \frac{1}{16}$, con $h = \frac{1}{25}$ e $k = \frac{24}{625}$.

2 Determina l'equazione dell'ellisse $hx^2 + ky^2 = 1$, con $h > 0$ e $k > 0$, tangente alla retta di equazione $y = -\frac{3}{4}x + 4$ nel punto $T(4; 1)$. $\left[\frac{3}{64}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\right]$

3 Calcola l'area S del triangolo OMN, dove O è l'origine degli assi cartesiani e M e N sono i punti di intersezione della retta passante per $P(4; 4)$ e per $Q(-1; 0)$ con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. $\left[\frac{14}{5}\right]$

4 Trova il valore di q tale che la retta di equazione $y = x + q$ stacchi una corda lunga $\frac{10\sqrt{2}}{7}$ sull'ellisse di equazione $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$. $\left[-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}\right]$

5 Determina le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$, con $h > 0$ e $k > 0$, passante per $M\left(\frac{9}{5}; \frac{14}{5}\right)$ e $N(3; -2)$. $[(-\sqrt{5}; 0)$ e $(\sqrt{5}; 0)]$

6 Trova le coordinate dei punti R e S, intersezioni, oltre a P e a Q, dell'ellisse passante per $P(0; -2)$ e $Q(6; 0)$ con la circonferenza di diametro PQ. $\left[R\left(\frac{15 + 3\sqrt{7}}{4}; \frac{5 - \sqrt{7}}{4}\right) \text{ e } S\left(\frac{15 - 3\sqrt{7}}{4}; \frac{5 + \sqrt{7}}{4}\right)\right]$

7 L'ellisse che ha un vertice in $V_1\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ e un vertice in $V_2(2; 0)$ e la parabola che ha il vertice in V_1 e passa per $P\left(3; \frac{21}{8}\right)$ hanno in comune, oltre a V_1, i punti A e B. Calcola la lunghezza del segmento AB. $[2\sqrt{3}]$

8 L'ellisse $\mathscr{E}$ ha equazione $\frac{9}{25}x^2 + \frac{4}{25}y^2 = 1$. Calcola l'area del triangolo MNT, dove T è il punto di tangenza di $\mathscr{E}$ con la retta t di equazione $y = -\frac{9}{8}x + \frac{25}{8}$ e i punti M e N sono le intersezioni di $\mathscr{E}$ con la retta r passante per i punti $P\left(-6; -\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(5; \frac{5}{2}\right)$. $\left[\frac{13}{15}\right]$