LABORATORIO DI MATEMATICA
L'IPERBOLE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che, lette le coordinate di due punti M e N, controlli se esiste la curva di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ passante per essi e, in caso affermativo, indichi se si tratta di un'iperbole, di un'ellisse o di una circonferenza e ne mostri l'equazione.
Proviamo il programma con:

a) $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ e $N(2; -\sqrt{3})$; b) $M\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$; c) $M(4; 3)$ e $N(-3; 4)$.

L'analisi del problema

Imponendo alla curva di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ la condizione di passaggio per i due punti $M(x_M; y_M)$ e $N(x_N; y_N)$, ricaviamo il seguente sistema lineare nelle incognite h e k: $\begin{cases} x_M^2\, h + y_M^2\, k = 1 \\ x_N^2 h + y_N^2 k = 1 \end{cases}$

Calcoliamo i determinanti necessari per applicare il metodo di Cramer:

$$d = \begin{vmatrix} x_M^2 & y_M^2 \\ x_N^2 & y_N^2 \end{vmatrix} = x_M^2 y_N^2 - x_N^2 y_M^2, \quad d_h = \begin{vmatrix} 1 & y_M^2 \\ 1 & y_N^2 \end{vmatrix} = y_N^2 - y_M^2, \quad d_k = \begin{vmatrix} x_M^2 & 1 \\ x_N^2 & 1 \end{vmatrix} = x_M^2 - x_N^2 .$$

Discutiamo la soluzione del sistema:
se $d = 0$, il sistema non è determinato, le curve possono o non esistere o essere infinite;
se $d_h = 0$ o $d_k = 0$, l'equazione di partenza non rappresenta una curva;

se $d \neq 0$, i coefficienti dell'equazione della curva risultano essere $h = \frac{d_h}{d}$ e $k = \frac{d_k}{d}$;

- se $h > 0$ e $k > 0$ e se $h = k$, l'equazione rappresenta una circonferenza;
- se $h > 0$ e $k > 0$ e se $h \neq k$, l'equazione rappresenta un'ellisse;
- se ($h < 0$ e $k > 0$) o se ($h > 0$ e $k < 0$), l'equazione rappresenta un'iperbole.

I coefficienti h e k non possono risultare entrambi negativi, altrimenti l'equazione non potrebbe avere come soluzione una coppia di numeri reali. Per esempio, non può essere $h = -1$ e $k = -1$, che darebbe l'equazione $-x^2 - y^2 = 1$.

L'algoritmo

```
Inizio,
Leggi x_M, y_M, x_N, y_N,
Calcola d, Calcola d_h, Calcola d_k,
Se d = 0 o d_h = 0 o d_k = 0,
    allora Scrivi I due punti non individuano una curva, Fine.
Calcola h e k,
Se h > 0 e k > 0,
        allora se h = k,
               allora Scrivi [Circonferenza; x² + y² = 1/h], Fine.
               altrimenti Scrivi [Ellisse; hx² + ky² = 1], Fine.
        altrimenti Scrivi [Iperbole; hx² + ky² = 1], Fine.
```

Il programma

- Scriviamo nella linea di editazione: Curva_2P(xm, ym, xn, yn) : = PROG(d : = xm^2 · yn^2 − xn^2 · ym^2, dh : = yn^2 − ym^2, dk : = xm^2 − xn^2, IF(d = 0 ∨ dh = 0 ∨ dk = 0, RETURN "I due punti non individuano una curva"), h : = dh/d, k : = dk/d, IF(h > 0 ∧ k > 0, IF(h = k, RETURN ["Circonferenza"; x^2 + y^2 = 1/h], RETURN ["Ellisse"; h · x^2 + k · y^2 = 1]), RETURN ["Iperbole"; h · x^2 + k · y^2 = 1])).
- Battiamo INVIO per inserire il programma nella #1 (figura 1).

```
      Curva_2P(xm, ym, xn, yn) :=
        Prog
          d := xm^2·yn^2 - xn^2·ym^2
          dh := yn^2 - ym^2
          dk := xm^2 - xn^2
          If d = 0 ∨ dh = 0 ∨ dk = 0
             RETURN "I due punti non individuano una curva"
#1:       h := dh/d
          k := dk/d
          If h > 0 ∧ k > 0
             If h = k
                RETURN ["Circonferenza"; x^2 + y^2 = 1/h]
                RETURN ["Ellisse"; h·x^2 + k·y^2 = 1]
             RETURN ["Iperbole"; h·x^2 + k·y^2 = 1]
```

◀ **Figura 1** Il programma per determinare l'equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ di una curva passante per due punti dati.

Alcune esecuzioni del programma

- Nella riga di editazione scriviamo
  Curva_2P(5/3, 4/3, 2, − SQRT(3)),
  usando le coordinate dei due punti corrispondenti al primo caso proposto dal problema.
- Con INVIO ricaviamo la #2 (figura 2).
- Su di essa diamo *Semplifica_Base*, ottenendo la risposta nella #3.
- In modo analogo otteniamo i risultati per gli altri due casi proposti.

#2: $\text{Curva\_2P}\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 2, -\sqrt{3}\right)$

#3: $\begin{bmatrix} \text{Iperbole} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{bmatrix}$

#4: $\text{Curva\_2P}\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

#5: $\begin{bmatrix} \text{Ellisse} \\ x^2 + 4 \cdot y^2 = 4 \end{bmatrix}$

#6: Curva_2P(4, 3, −3, 4)

#7: $\begin{bmatrix} \text{Circonferenza} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{bmatrix}$

▶ **Figura 2** Le esecuzioni del programma.

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi costruisci una sessione di lavoro, con il computer, contenente le operazioni necessarie per pervenire alla soluzione corredate da commenti e da un grafico finale con i dati e i risultati.

1 Trova le coordinate dei punti di intersezione fra un'iperbole la cui equazione è riferita agli assi e un'iperbole la cui equazione è riferita agli asintoti. La prima passa per $M(4; 5)$ e $N(0; 3)$, la seconda passa per M.
$[(-4; -5), (4; 5)]$

2 Trova le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole riferita agli assi passante per i punti $P(3; \sqrt{5})$ e $Q(2; 0)$ con l'ellisse avente un vertice in $V(2\sqrt{2}; 0)$ e tangente alla retta di equazione $15x - 7y + 48 = 0$.
$\left[\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)\right]$

3 Trova il valore del parametro k in modo che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ky - 1 = 0$ passi per il punto P comune alla retta di equazione $y = -2x + 2$, all'iperbole di equazione $xy = -4$ e alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$. $[-4]$

4 Determina l'equazione dell'iperbole riferita agli asintoti passante per il centro della circonferenza che stacca sull'asse x una corda lunga 8 e passa per $P(12; 7)$ e per $Q(9; 8)$. $[xy = 27, xy = 8379]$

5 Dette A, B, C e D le intersezioni dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 16$ con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, determina il coefficiente r in modo che il perimetro $2p$ del rettangolo $ABCD$ sia lungo 32.

$[r = \sqrt{34} \simeq 5{,}83095]$

6 Determina il valore positivo di m tale che la retta di equazione $y = mx + 1$ sia tangente all'iperbole di equazione $-25x^2 + 9y^2 = 25$.

$\left[m = \frac{4}{3} \simeq 1{,}33333\right]$

7 La retta di equazione $x = 4$ interseca l'iperbole di equazione $\frac{1}{4}x^2 + ky^2 = 1$, con $k < 0$, nei punti A e B, determina il valore di k in modo che l'area del triangolo ABV, dove V è il vertice dell'iperbole appartenente al semiasse positivo delle x, valga 6.

$\left[k = -\frac{1}{3} \simeq -0{,}33333\right]$

Esercizi con la programmazione

Svolgi l'analisi di ognuno dei seguenti problemi, da essa ricava un algoritmo risolutivo, traducilo nel linguaggio di programmazione di Derive, applicalo nei casi richiesti. Al termine, traccia con Derive il grafico dei dati e dei risultati corrispondenti al primo caso proposto.

8 Trova le eventuali coordinate dei punti di intersezione fra la retta di equazione $y = -4x + 8$ e l'iperbole equilatera la cui equazione è riferita agli asintoti e passa per il punto $P(x_P; y_P)$.
Prova il programma con $P(2; 2)$, con $P(1; 3)$, con $P(2; 3)$.

$\left[(1; 4); \left(\frac{1}{2}; 6\right) \vee \left(\frac{3}{2}; 2\right); \text{le intersezioni non esistono}\right]$

9 Determina l'eventuale equazione della retta parallela all'asse x tale che, incontrando l'iperbole di equazione $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{25}y^2 = 1$, formi una corda di lunghezza d. Prova il programma con $d = 5$, $d = 3$, $d = 2$.

$\left[y = -\frac{10}{3} \vee y = \frac{10}{3}, y = 0, \nexists \text{ la retta}\right]$