

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE CONICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data l'equazione di un fascio di coniche

$$(k + 1)x^2 - ky^2 + 2y - 4 = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

con l'aiuto di Derive troviamo le coordinate dei punti comuni a tutte le coniche e ricaviamo i valori di k che corrispondono alle equazioni delle iperboli con l'asse trasverso parallelo all'asse y . Tracciamo, per verifica, il grafico di tre di tali iperboli.

La sessione di lavoro

- Entriamo in ambiente Derive e scriviamo il titolo del lavoro con il comando *Inserisci_Testo* (figura 1).
- Con *Crea_Espressione* inseriamo nella #1 l'equazione del fascio di coniche.
- Applichiamo il comando *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a k* per ottenere nella #2 l'equazione con il parametro k raccolto.
- Mettiamo a sistema le equazioni di due coniche, che ricaviamo dalla #2, all'interno della funzione SOLUTIONS, che dà le soluzioni in forma tabellare (figura 2).
- Risolviamo il sistema con *Semplifica_Base* (figura 2).
- Cerchiamo le coordinate x_C e y_C del centro della conica in funzione del parametro k : con *Semplifica_Sostituisci variabili* sostituiamo nella #1 $x + x_C$ a x e $y + y_C$ a y , le equazioni della traslazione del riferimento canonico, ottenendo la #5 (figura 3).

Un problema sulle coniche

```
#1: x^2*(k+1) - k*y^2 + 2*y - 4 = 0
#2: k*(x^2 - y^2) + x^2 + 2*y - 4 = 0
```

▲ Figura 1

Troviamo le coordinate dei punti comuni.

```
#3: SOLUTIONS([x^2 - y^2 = 0, x^2 + 2*y - 4 = 0], [x, y])
#4: [ [sqrt(5)+1, -sqrt(5)-1]
      [sqrt(5)-1, sqrt(5)-1]
      [1-sqrt(5), sqrt(5)-1]
      [-sqrt(5)-1, -sqrt(5)-1] ]
```

▲ Figura 2

Determiniamo le coordinate del centro in funzione di k .

```
#5: x^2*(k+1) + 2*x*x_C + (k+1)*(-k*y^2 + 2*y - 4) + k*(x_C^2 - y_C^2) + x_C^2 + 2*y_C - 4 = 0
#6: SOLVE(2*(1 - k*y_C) = 0, y_C)
#7: y_C = 1/k
```

◀ Figura 3

- Dalla #5 notiamo che il termine in x si annulla ponendo $x_C = 0$.
- Cerchiamo il valore di y_C che annulli il termine in y , impostando nella #6 l'equazione formata dal suo coefficiente uguagliato a 0.
- Con *Semplifica_Base*, applicato alla #6, troviamo nella #7 l'ordinata del centro in funzione di k .
- Impostiamo la traslazione che annulla i termini di primo grado, sostituendo nella #1 $y + 1/k$ a y (figura 4).
- Diamo *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a x e a y* e otteniamo la #9.



- Per concludere la riduzione dell'equazione in forma canonica, dividiamo l'equazione per il termine noto: diamo *Crea_Espressione*, evidenziamo con un clic la #9, battiamo F4 (importando nella riga di editazione delle espressioni l'equazione posta fra parentesi tonde), digitiamo di seguito $/(4k - 1)/k$ (il termine noto) e battiamo INVIO. Otteniamo così nella #10 l'impostazione della riduzione a forma canonica.

- Con *Semplifica_Sviluppa Triviale rispetto a x e a y* ricaviamo nella #11 l'equazione canonica.

- Se nell'equazione canonica il coefficiente di x^2 è minore di 0 e il coefficiente di y^2 è maggiore di 0, l'equazione rappresenta un'iperbole con l'asse trasverso parallelo all'asse y . Imponiamo tale condizione impostando un sistema di disequazioni nel quale la prima disequazione è formata dal coefficiente di x^2 posto minore di 0 e la seconda è formata dal coefficiente di y^2 posto maggiore di 0, entrambi importati dall'etichetta #11 (figura 5).

- Diamo *Semplifica_Base* e ricaviamo i valori di k che corrispondono alle equazioni delle iperboli richieste.

Il grafico

- Per scrivere le equazioni di tre iperboli, usiamo la funzione VECTOR. Scegliamo tre valori del parametro k , -4 , -2 e $\frac{1}{6}$, appartenenti agli intervalli trovati, quindi nella riga di editazione digitiamo VECTOR(, importiamo l'equazione contenuta nella #1 con F3, digitiamo , k , $[-4, -2, 1/6]$) e battiamo INVIO (figura 6).

- Diamo *Semplifica_Base* e vediamo comparire le equazioni nella #15.

- Con *Finestra_Grafica 2D* entriamo in ambiente grafico, dove con *Traccia il grafico* tracciamo il grafico delle tre iperboli.

- Torniamo in ambiente algebrico, evidenziamo la #4, contenente le coordinate dei punti comuni, ritorniamo in grafica, dove evidenziamo i quattro punti.

- Con *Imposta_Rapporto d'aspetto* e *Resetta* rendiamo monometrico il riferimento cartesiano e vediamo il grafico di figura 7.

Riduciamo l'equazione a forma canonica.

#8: $x \cdot (k+1) - k \cdot \left(y + \frac{1}{k}\right)^2 + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{k}\right) - 4 = 0$

#9: $x \cdot (k+1) - k \cdot y^2 - \frac{4 \cdot k - 1}{k} = 0$

#10: $\frac{x \cdot (k+1) - k \cdot y^2 - \frac{4 \cdot k - 1}{k}}{\frac{4 \cdot k - 1}{k}}$

#11: $\frac{k \cdot x \cdot (k+1)}{4 \cdot k - 1} + \frac{k^2 \cdot y^2}{1 - 4 \cdot k} - 1 = 0$

▲ Figura 4

Imponiamo ai coefficienti di assumere i segni corrispondenti alle iperboli con l'asse trasverso parallelo all'asse y .

#12: SOLVE $\left[\left[\frac{k \cdot (k+1)}{4 \cdot k - 1} < 0, \frac{k^2}{1 - 4 \cdot k} > 0 \right], k \right]$

#13: $\left[k < -1, 0 < k < \frac{1}{4} \right]$

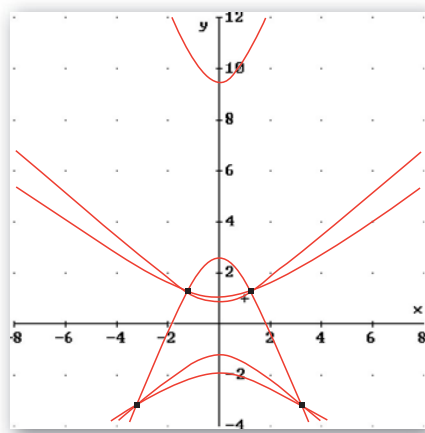
▲ Figura 5

Scegliamo tre valori di k appartenenti agli intervalli trovati.

#14: VECTOR $\left[x^2 \cdot (k+1) - k \cdot y^2 + 2 \cdot y - 4 = 0, k, \left[-4, -2, \frac{1}{6} \right] \right]$

#15: $\left[3 \cdot x^2 - 2 \cdot y \cdot (2 \cdot y + 1) = -4, x^2 - 2 \cdot y \cdot (y + 1) = -4, 7 \cdot x^2 - y^2 + 12 \cdot y = 24 \right]$

▲ Figura 6



► **Figura 7** Le iperboli corrispondenti ai valori -4 , -2 e $\frac{1}{6}$ del parametro k .

Esercitazioni

Determina, con il computer, le equazioni delle seguenti coniche, studiale, riducile a forma canonica, traccia entrambi i grafici nel medesimo riferimento cartesiano e trova ciò che è richiesto.

1 L'ellisse di fuochi $F_1(-1; -2)$ e $F_2(-1; 4)$ e di semiasse maggiore $b = 5$.

L'equazione della tangente nel suo punto di ordinata 4 e di ascissa positiva.

$$\left[25x^2 + 16y^2 + 50x - 32y - 359 = 0; y = -\frac{5}{3}x + \frac{23}{3} \right]$$

2 L'ellisse di fuochi $F_1\left(1; -\frac{4}{5}\right)$ e $F_2\left(1; \frac{4}{5}\right)$ e di semiasse maggiore $b = 1$.

Le coordinate delle intersezioni con gli assi cartesiani.

$$\left[25x^2 + 9y^2 - 50x + 16 = 0; \left(\frac{2}{5}; 0\right), \left(\frac{8}{5}; 0\right), \text{ non incontra l'asse } y \right]$$

3 L'ellisse di vertici $V_1\left(0; -\frac{5}{2}\right)$, $V_2\left(2; -\frac{7}{2}\right)$, $V_3\left(4; -\frac{5}{2}\right)$ e $V_4\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

Le coordinate delle intersezioni con la retta $3x + 8y + 4 = 0$.

$$\left[x^2 + 4y^2 - 4x + 20y + 25 = 0; \left(\frac{16}{5}; -\frac{17}{10}\right) \right]$$

Usa il computer per studiare le equazioni delle coniche seguenti, trova ciò che è richiesto e traccia i grafici della conica e dei suoi punti salienti.

4 La parabola $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$.

L'equazione della tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$.

$$[y = -x + 4]$$

5 L'iperbole $9x^2 - 16y^2 - 10x + 32y = 0$.

L'equazione delle tangenti nei punti di intersezione con l'asse y .

$$\left[y = \frac{5}{16}x \text{ e } y = -\frac{5}{16}x + 2 \right]$$

6 L'iperbole $-x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.

Le intersezioni con la circonferenza di centro $\Omega(0; 3)$ e raggio $r = \sqrt{10}$.

$$[(-1; 0) \text{ e } (3; 2)]$$

Per ognuna delle seguenti equazioni di secondo grado in x e y fai uso del computer per studiare il carattere della conica in relazione ai valori del parametro k . Trova i punti comuni a tutte le coniche. Successivamente determina le coniche che soddisfano le condizioni indicate. Inoltre, traccia il grafico delle coniche trovate ed evidenzia in esso i punti comuni.

7 $x^2 - y^2 + 3kx - 5ky - 16 = 0$.

a) Passante per il punto $P(5; -3)$.

b) Avente il centro in un punto di ascissa $-\frac{3}{2}$.

c) Avente il centro in un punto di ordinata -10 .

d) Avente un vertice di ascissa -5 .

$$\left[k \neq -2 \text{ e } k \neq 2: \text{iperboli equilateri}; k = -2 \text{ e } k = 2: \text{rette}; (-5; -3) \text{ e } (5; 3); \right. \\ \left. \text{a) } k = 0; \text{ b) } k = 1; \text{ c) } k = 4; \text{ d) } k = \frac{6}{5} \vee k = \frac{10}{3} \right]$$

8 $kx^2 + ky^2 - 2x - y - 4k + 4 = 0.$

a) La circonferenza con il raggio $r = \frac{\sqrt{37}}{2}.$

b) Avente l'ascissa del centro uguale a $-1.$

c) Formanti con l'asse y una corda di misura $1.$

d) Tangenti alla retta di equazione $x = 3.$

$$\left[k \neq 0: \text{circonferenze}; k = 0: \text{retta}; \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{ e } (2; 0); \text{ a) } k = \frac{5}{21} \text{ e } k = -1;$$

$$\text{b) } k = -1; \text{ c) } k = \frac{1}{15} \text{ e } k = 1; \text{ d) } k = -\frac{1}{10} \text{ e } k = \frac{1}{2} \right]$$

Per ognuno dei seguenti casi, scrivi una funzione con il computer che legga i valori dei dati e dia in uscita, se possibile, i valori delle grandezze indicate. Applica le funzioni per verificare le soluzioni di problemi precedentemente svolti.

9 Dati i coefficienti dell'equazione $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, indica il tipo di conica che rappresenta e determina la sua equazione canonica.

10 Dati i coefficienti della conica di equazione $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, trova le coordinate delle sue eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

11 Conoscendo le coordinate dei fuochi F_1 e F_2 e il semiasse maggiore a di un'ellisse, determina la sua equazione.

12 Conoscendo le coordinate dei fuochi F_1 e F_2 e il semiasse trasverso a di un'iperbole, determina la sua equazione.

13 Dati i coefficienti h e k della conica di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$, calcola sua eccentricità.