LABORATORIO DI MATEMATICA
FORMULE GONIOMETRICHE

Le funzioni goniometriche con Derive

La funzione	restituisce
SIN(α)	il seno dell'angolo α
COS(α)	il coseno dell'angolo α
TAN(α)	la tangente dell'angolo α
COT(α)	la cotangente dell'angolo α

La funzione	restituisce
ASIN(n)	l'arcoseno α di n
ACOS(n)	l'arcocoseno α di n
ATAN(n)	l'arcotangente α di n
ACOT(n)	l'arcocotangente α di n

Inseriamo la costante $\frac{\pi}{180}$ con DEG e il numero π con PI.

I sistemi di misura degli angoli
Per default Derive considera le misure degli angoli in radianti.
Possiamo operare anche con le ampiezze degli angoli nel sistema sessadecimale, nel quale l'unità di misura degli angoli è il grado, la 360-esima parte dell'angolo giro, e i suoi sottomultipli si misurano nel sistema decimale.
Per farlo nella versione 6 di Derive, dobbiamo scriverle seguite dalla parola DEG o dal simbolo ° battuto dalla tastiera o importato dall'elenco dei simboli matematici.
Per esempio, se inseriamo le espressioni SIN(22°) e ACOS(0.4)/DEG e applichiamo su di esse *Semplifica_Approssima*, ricaviamo rispettivamente i valori approssimati del seno di 22° e dell'arcocoseno di 0,4 in sessadecimale.
Se facciamo tracciare il grafico di SIN(x°), vediamo la sinusoide con periodo 360° e se tracciamo quello di SIN(x), osserviamo la sinusoide con periodo 2π.
Selezionando *Degree* nel campo *Angolo in* della finestra di dialogo di *Opzioni_Modalità Semplificazione*, otteniamo le misure degli angoli nel sistema sessadecimale, solo usando sulle espressioni goniometriche il comando *Semplifica_Base*.
Derive non usa il sistema sessagesimale, dove i sottomultipli del grado sono i primi e i secondi.
Nella versione 5, per operare con i gradi sessadecimali, selezioniamo *Degree* nel campo *Angolo in* della finestra di dialogo di *Dichiara_Impostazioni di semplificazione*.

Le semplificazioni goniometriche
Se diamo il comando *Semplifica_Base* su un'espressione goniometrica inserita nella zona algebrica, otteniamo diverse trasformazioni a seconda dell'opzione attivata nel campo *Trasformazioni trigonometriche* della finestra di dialogo di *Opzioni_Modalità Semplificazione*. Le tre opzioni che possiamo selezionare sono:
Auto (valida per default) che porta a espressioni più compatte;
Collect che causa raccoglimenti di prodotti (applica le formule di Werner e altro);
Expand che produce lo sviluppo di funzioni con somme o prodotti di angoli (usa le formule di addizione e simili).
Nota. Derive è impostato per svolgere operazioni con schemi automatici che spesso non corrispondono a quelli che usiamo manualmente. In particolare, in goniometria, materia ricca di formule, non riusciamo sempre a ottenere le semplificazioni nella forma desiderata. Sta a noi, a volte, intervenire con passaggi aritmetici, con artifizi algebrici, con sostituzioni di formule per pervenire alle forme semplificate che più ci interessano.

Il comando *Semplifica_Visualizza passaggi*
Nella versione 6, Derive mette a disposizione, nel menu *Semplifica*, il comando *Visualizza passaggi*. Il comando opera una semplificazione alla volta e mostra, all'interno di una casella di testo, la proprietà applicata.
Troviamo il comando anche nella barra dei bottoni.

Il bottone di *Semplifica_Visualizza passaggi*

Le espressioni e gli archi associati

ESERCITAZIONE GUIDATA

Semplifichiamo l'espressione goniometrica $2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}(\pi - \alpha)$.

La sessione di lavoro

• Entriamo in ambiente Derive e nella riga di editazione scriviamo l'espressione 2* COS (α + π/6) + SIN (π − α) e la immettiamo con INVIO nella #1 (figura 1).

• Nel campo *Trasformazioni trigonometriche* della finestra di dialogo di *Opzioni_Modalità Semplificazione* selezioniamo l'opzione *Expand*.

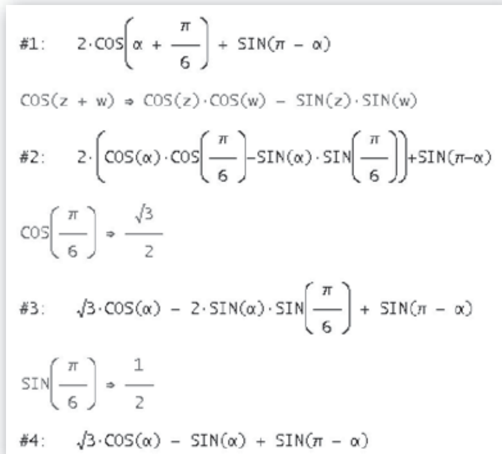
• Sulla #1 applichiamo il comando *Semplifica_Visualizza passaggi* e vediamo apparire nella zona algebrica un riquadro contenente una proprietà goniometrica, precisamente la formula di addizione per il coseno. Sotto il riquadro di testo compare l'etichetta #2, con l'espressione semplificata attraverso l'applicazione della proprietà mostrata.

• Usiamo di nuovo il comando ottenendo nella #3 la sostituzione di $\cos\frac{\pi}{6}$ con $\frac{\sqrt{3}}{2}$ preceduta dal commento.

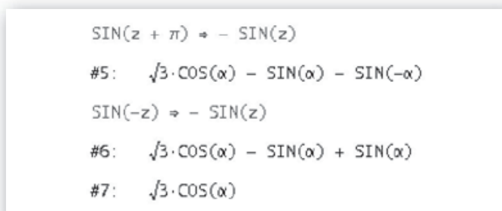
• Nella #4 determiniamo la sostituzione di $\text{sen}\frac{\pi}{6}$ con $\frac{1}{2}$.

• Proseguiamo la semplificazione notando che Derive, per ridurre $\text{sen}(\pi - \alpha)$, non ricorre alla formula $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, bensì alla $\text{sen}(z + \pi) = -\,\text{sen}\,z$, supponendo $z = -\,\alpha$ e dando $-\,\text{sen}(-\,\alpha)$ (figura 2).

• Siamo costretti, quindi, a un altro passaggio e Derive, applicando la $\text{sen}(-\,\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$, giunge a $\text{sen}\,\alpha$.



▲ **Figura 1**



▲ **Figura 2**

• Operiamo l'ultima semplificazione dalla #6 alla #7, che rimane senza commento.

Nota. Il comando *Semplifica_Visualizza passaggi* non mostra ancora nella versione 6 tutte le possibili semplificazioni di Derive.

Esercitazioni

Semplifica le seguenti espressioni sul quaderno. Con l'aiuto del computer, usa comandi appropriati per effettuare le medesime semplificazioni. Sostituisci ad α l'ampiezza indicata, sia nell'espressione iniziale sia in quella semplificata, e determinane i valori, sia quello esatto sia quello approssimato. Stampa la sessione di lavoro.

1 $\text{sen}(90° - \alpha) - 3\cos(180° - \alpha)$, con $\alpha = 120°$. $[-2]$

2 $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right)$, con $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

3 $\text{tg}(315° - \alpha)$, con $\alpha = 180°$. $[-1]$

Svolgi con il computer le seguenti questioni.
Dato il valore di una delle funzioni seno o coseno, determina i valori corrispondenti dell'altra funzione, sia applicando la relazione fondamentale sia passando attraverso i valori dell'angolo espressi in radianti e appartenenti all'intervallo $[0; 2\pi[$.
Esprimi le ampiezze degli angoli anche nel sistema sessadecimale e nel sistema sessagesimale.
Traccia i grafici sovrapposti di seno e di coseno nell'intervallo $[0°; 360°[$ ed evidenzia in esso i valori di cui sopra.

4 Dato $\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$. [$\cos\alpha = 0{,}6$ e $\alpha = 53°7'48''$, $\cos\alpha = -0{,}6$ e $\alpha = 126°52'12''$]

5 Dato $\text{sen}\,\alpha = -0{,}25$. [$\cos\alpha = 0{,}9682$ e $\alpha = 345°31'21''$, $\cos\alpha = -0{,}9682$ e $\alpha = 129°28'39''$]

6 Dato $\cos\alpha = -0{,}5$. [$\text{sen}\,\alpha = 0{,}8660$ e $\alpha = 120°$, $\text{sen}\,\alpha = -0{,}8660$ e $\alpha = 240°$]

7 Dato $\cos\alpha = 0{,}68$. [$\text{sen}\,\alpha = 0{,}7332$ e $\alpha = 47°9'23''$, $\text{sen}\,\alpha = -0{,}7332$ e $\alpha = 312°50'37''$]

Determina i valori delle seguenti espressioni, conoscendo il valore della funzione goniometrica indicata senza passare dal valore dell'angolo e supponendo che $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

8 $\text{sen}\,\alpha + \sqrt{5}\cos\alpha$, con $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

9 $\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha} + \text{tg}\,\alpha - \dfrac{\sqrt{15}}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha}$, con $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

10 $(4\,\text{sen}\,\alpha - 1)(3\sqrt{3}\,\text{cotg}\,\alpha - 2) + (2\,\text{sen}\,\alpha - 1)^2$, con $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$ [3]

Data l'ampiezza α di un angolo in un certo sistema di misura, determina gli archi associati (supplementare, che differisce di un angolo piatto, esplementare) e i corrispondenti valori del seno (esatti e approssimati). Traccia il grafico di $y = \text{sen}\,x$ ed evidenzia nella sinusoide i valori trovati.

11 Supponi $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

12 Supponi $\alpha = 0{,}4225$ rad.

13 Supponi $\alpha = 32°20'12''$.

14 Supponi $\alpha = 48{,}4685°$.

Data l'ampiezza α di un angolo in un certo sistema di misura, determina gli archi associati (supplementare, che differisce di un angolo piatto, esplementare) e i corrispondenti valori del coseno (esatti e approssimati).
Traccia il grafico di $y = \cos x$ ed evidenzia nella cosinusoide i valori trovati.

15 Supponi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

16 Supponi $\alpha = 1$ rad.

17 Supponi $\alpha = 38°30'$.

18 Supponi $\alpha = 20{,}1275°$.

Data l'ampiezza α di un angolo in un certo sistema di misura, determina gli archi associati (supplementare, che differisce di un angolo piatto, esplementare) e i corrispondenti valori della tangente (esatti e approssimati). Traccia il grafico di $y = \text{tg}\, x$ ed evidenzia nella tangentoide i valori trovati.

19 Supponi $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

20 Supponi $\alpha = 0{,}5$ rad.

21 Supponi $\alpha = 20°12'30''$.

22 Supponi $\alpha = 50{,}8025°$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni con il comando *Semplifica_Visualizza_Passaggi* di Derive.

23 $8 \cdot \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ $\left[-\sqrt{5 - \sqrt{5}}\,\right]$

24 $8 \cdot \cos 36° \cdot \cos 30°$ $[\sqrt{15} + \sqrt{3}]$

25 $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ $[\sqrt{2} + 1]$