

LABORATORIO DI MATEMATICA

I NUMERI COMPLESSI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo un foglio elettronico, tramite Excel, che, letti la parte reale a e il coefficiente b della parte immaginaria, calcoli le n radici n -esime del numero complesso $a + bi$.
Troviamo con il foglio le tre radici cubiche di i ($a = 0$ e $b = 1$).

L'analisi del problema

Per ricavare le radici n -esime di un numero complesso $a + bi$ ricorriamo alla formula di De Moivre

$$c_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right], \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ calcolandone i vari termini.}$$

In particolare, otteniamo l'argomento α operando i seguenti controlli su a e su b :

$$\text{se } a = 0 \text{ e } b < 0, \alpha = \frac{3}{2}\pi; \text{ se } a = 0 \text{ e } b \geq 0, \alpha = \frac{1}{2}\pi;$$

$$\text{se } a > 0 \text{ e } b \geq 0, \alpha = \arctg \frac{b}{a}; \text{ se } a > 0 \text{ e } b < 0, \alpha = \arctg \frac{b}{a} + 2\pi;$$

$$\text{se } (a < 0 \text{ e } b \geq 0) \text{ o } (a < 0 \text{ e } b < 0), \alpha = \arctg \frac{b}{a} + \pi.$$

La costruzione del foglio

- Scriviamo delle indicazioni e mettiamo dei bordi alle celle B4, D4 e I4 per segnalare dove immettere i valori dei coefficienti a e b e l'indice n della radice, e inseriamo delle didascalie per leggere i risultati (figura 1).
- In B6 digitiamo $=\text{RADQ}(B4^2 + D4^2)$ per il calcolo di $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- In E6 inseriamo la formula con le condizioni per determinare α : $=\text{SE}(B4 > 0; \text{SE}(D4 < 0; 3*\text{PI.GRECO}()/2; \text{PI.GRECO}()/2); \text{SE}(B4 > 0; \text{SE}(D4 > 0; \text{ARCTAN}(D4/B4); \text{ARCTAN}(D4/B4) + 2*\text{PI.GRECO}()); \text{ARCTAN}(D4/B4) + \text{PI.GRECO}())$.
- In F6, trasformiamo α in gradi con $=\text{E6}*180/\text{PI.GRECO}()$.
- Calcoliamo la radice aritmetica n -esima di r con $=\text{B6}^{(1/14)}$ in B7.
- In E7 scriviamo $=\text{E6}/14$ per calcolare $\theta = \frac{\alpha}{n}$.
- In F7, trasformiamo θ in gradi con $=\text{E7}*180/\text{PI.GRECO}()$.
- In I7, digitiamo $=2*\text{PI.GRECO}()/14$ per ricavare $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n}$.
- In J7, trasformiamo $\Delta\alpha$ in gradi scrivendo $=\text{I7}*180/\text{PI.GRECO}()$.
- Per sviluppare le radici dalla formula di De Moivre, mettiamo un contatore nella colonna A che parta da 0 e si fermi a $n-1$; in A10 digitiamo pertanto 0 e in A11 $=\text{SE}(0(A10 = \$I\$4 - 1; A10 = "/"; "/"; A10 + 1)$ e la copiamo sino alla A14 (rendiamo la tabella atta a contenere sino alle radici quinte).
- Nelle seguenti celle scriviamo le formule per rappresentare le n radici sotto forma trigonometrica e sotto forma algebrica. In ognuna inseriamo un controllo riferito alla colonna A, che, se l'indice $n-1$ è superato, lasci la cella vuota.

$$B10 = \text{SE}(A10 = "/"; "", \$B\$7)$$

$$D10 = \text{SE}(A10 = "/"; "", \$F\$7 + A10*\$J\$7)$$

$$F10 = \text{SE}(A10 = "/"; "", \$F\$7 + A10*\$J\$7)$$

$$H10 = \text{SE}(A10 = "/"; "", \$B\$7*\text{COS}(\$E\$7 + A10*\$I\$7))$$

$$J10 = \text{SE}(A10 = "/"; "", \$B\$7*\text{SEN}(\$E\$7 + A10*\$I\$7))$$



C10 =SE(A10 = "/"&"&"&"&"*(COS(")
 E10 =SE(A10 = "/"&"&"&"&" + i*SEN(")
 G10 =SE(A10 = "/"&"&"&"&"")
 I10 =SE(A10 = "/"&"&"&"&" + i*")

- Copiamo quindi la zona B10:J10 sino alla riga 14.
- Mettiamo dei bordi alle tabelle delle radici.

L'applicazione del foglio

- Per trovare le radici cubiche di i , in B4 digitiamo 0, in D4 1e in I4 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Le radici di un numero complesso										
2											
3	Inserisci i coefficienti del numero complesso $a + bi$ e l'indice della radice										
4	a =	0,0000	b =	1,0000			n =	3			
5											
6	r =	1,0000	α =	1,5708	90						
7	$r^{1/n}$ =	1,0000	α/n =	0,5236	30	Δ di α =	2,0944	120			
8											
9	k	Le radici sotto forma trigonometrica					Le radici sotto forma algebrica				
10	0	1,0000 * (COS(30)+ i*SEN 30)					0,8660	+ i *	0,5000		
11	1	1,0000 * (COS(150)+ i*SEN 150)					-0,8660	+ i *	0,5000		
12	2	1,0000 * (COS(270)+ i*SEN 270)					0,0000	+ i *	-1,0000		
13	/										
14	/										

▲ Figura 1 Il foglio con le radici cubiche di i .

Esercitazioni

Per ognuna delle seguenti espressioni costruisci un foglio che, letti i coefficienti dei numeri complessi in esse contenute, li trasformi in forma trigonometrica, semplifichi l'espressione e trasformi il risultato in forma algebrica. Prova il foglio con i dati indicati a fianco. Sul quaderno semplifica algebricamente l'espressione con i medesimi dati.

1 $(a + bi)^3 (c + di)^2 (e + fi)$. Prova con $a = -1, b = -1, c = 2, d = 1, e = 0$ e $f = -1$. [2 - 14i]

2 $\frac{(a + bi)^3 (e + fi)}{(c + di)^2}$. Prova con $a = -1, b = -1, c = 2, d = 1, e = -3$ e $f = 1$. [0,8 + 1,6i]

3 Costruisci un foglio che, letti la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, fornisca i risultati richiesti.
 Tre numeri complessi; risultato: l'espressione $\frac{a + bi}{c + di} (e + fi)$ semplificata.

I grafici di curve in coordinate polari

Con l'aiuto del computer traccia i grafici delle seguenti curve, le cui equazioni sono date in coordinate polari, assegnando al parametro il valore consigliato e altri valori a tua scelta.

4 $r = \frac{1}{1 - e \cos \alpha}$, con $e = 0,5$ (ellisse).

5 $r = 1 + a \cos \alpha$, con $a = 2$ (cardioide).

6 $r = \sin(n\alpha)$, con $n = 2$ (rodonea).

7 $r = k\alpha$, con $k = 1$ (spirale di Archimede).

8 $r = \frac{k}{\alpha}$, con $k = 10$ (spirale di Galilei).

9 $r = 10e^{m\alpha}$, con $m = -1$ (spirale logaritmica).

10 $r = a \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}$, con $a = 4$ (trisettrice di Mac Laurin).