

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE MATRICI E I DETERMINANTI

Alcune funzioni sulle matrici di Derive

La funzione	serve per ottenere
DET(M)	il determinante della matrice M .
M^{-1}	l'inversa della matrice M .

La funzione	serve per ottenere
M'	la trasposta della matrice M .
ELEMENT(M, m, n)	l'elemento della matrice M di riga m e di colonna n .

La funzione	crea una matrice formata dalla matrice M
INSERT(r, M, n)	con l'inserimento della riga r dopo la riga di indice n .
REPLACE(r, M, n)	con la sostituzione della riga di indice n con la riga r .
DELETE(M, n)	con la cancellazione della riga di indice n .
ADJOIN(r, M)	con l'aggiunta della riga r .
APPEND($M, M1$)	saldata alla matrice $M1$.

L'assegnazione $M \downarrow i \downarrow j := p$ sostituisce l'elemento della matrice M di riga i e colonna j con l'elemento p .

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con l'aiuto di Derive discutiamo il rango della matrice

$$M \begin{bmatrix} k & 2 & 1 - k \\ k^2 - 2k & -2k & 0 \end{bmatrix}$$

in relazione ai valori che può assumere il parametro reale k .

L'analisi del problema

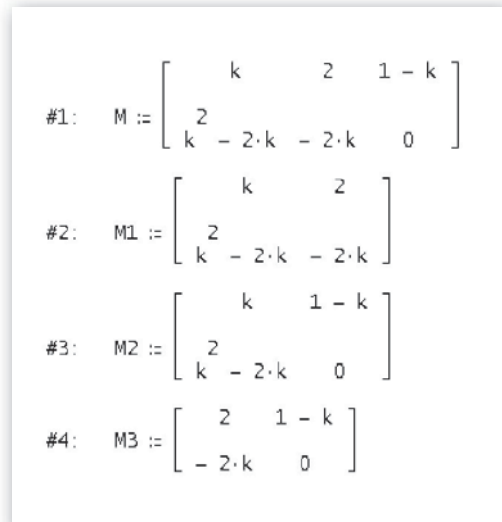
La matrice M ha dimensione 2×3 e da essa possiamo estrarre tre sottomatrici quadrate di ordine due.

Se stabiliamo che il determinante di una di esse (un minore di M di ordine 2) è \neq da 0, M ha rango 2.

Se tutti e tre i minori risultano nulli, poiché un elemento di M è \neq da 0, M ha rango 1.

Le sottomatrici di M

- Nella riga di editazione scriviamo la matrice dandole il nome M , $M := [k, 2, 1 - k; k^2 - 2k, -2k, 0]$ e con INVIO la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Da essa estraiamo le tre sottomatrici quadrate di ordine 2. Digitiamo $M1 :=$, importiamo con F_3 nella riga di editazione la M , cancelliamo gli elementi dell'ultima colonna e con INVIO immettiamo nella #2 la prima sottomatrice.
- Operiamo in modo simile per ottenere nella #3 la seconda sottomatrice $M2$ e nella #4 la terza sottomatrice $M3$.



▲ Figura 1



I minori di M

- Per calcolare il determinante di $M1$, un minore di M , scriviamo l'espressione $\text{DET}(M1)$ e la inseriamo nella #5.
- Su di essa diamo *Semplifica_Base* ottenendo nella #6 il determinante di $M1$ in funzione di k .
- Applichiamo *Risolvi_Espressione*, ricavando nella #8 i valori di k che annullano $M1$.
- Svolgendo le medesime operazioni, troviamo rispettivamente nella #12 e nella #16 i valori di k che annullano i determinanti di $M2$ e di $M3$.

Dai risultati ottenuti ricaviamo che:

- per $k \neq 0$ e $k \neq 1$, il determinante di $M1$ è diverso da 0, quindi il rango di M è 2.
- per $k = 0$ o $k = 1$, i determinanti di $M1$, $M2$ e $M3$ si annullano e, poiché in M troviamo almeno un elemento diverso da 0, il rango di M è 1.

```
#5: DET(M1)
#6: 4 · k · (1 - k)
#7: SOLVE(4 · k · (1 - k), k)
#8: k = 1 ∨ k = 0
#9: DET(M2)
#10: k · (k - 1) · (k - 2)
#11: SOLVE(k · (k - 1) · (k - 2), k)
#12: k = 2 ∨ k = 1 ∨ k = 0
#13: DET(M3)
#14: 2 · k · (1 - k)
#15: SOLVE(2 · k · (1 - k), k)
#16: k = 1 ∨ k = 0
```

▲ Figura 2

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer, supponendo che A , B e C siano le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},$$

stabilisci o meno la validità delle seguenti uguaglianze.

- 1** $A \cdot B = B \cdot A$ [falsa]
- 2** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ [vera]
- 3** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ [vera]
- 4** $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ [falsa]
- 5** $(A - B) - C = A - (B - C)$ [falsa]
- 6** $(B + C) / A = B / A + C / A$
(Suggerimento. Per dividere una matrice M per una matrice A , si moltiplica M per l'inversa di A , dopo aver controllato che $\text{DET}(A) \neq 0$: $(M / A = M \cdot A^{-1})$.) [se $\text{DET}(A) \neq 0$, vera]
- 7** Verifica che:
 $\text{DET}(A + B) \neq \text{DET}(A) + \text{DET}(B)$,
 $\text{DET}(A \cdot B) = \text{DET}(B \cdot A) = \text{DET}(A) \cdot \text{DET}(B)$,
 $\text{DET}(A / B) = \text{DET}(A) / \text{DET}(B)$, se $\text{DET}(B) \neq 0$.

Con l'aiuto del computer semplifica le espressioni indicate, dove A , B e C sono le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 1 & -8 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 11 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcola poi il determinante della matrice risultato. Ricava poi il valore dell'espressione sostituendo ad A , B e C i corrispondenti determinanti.

8	$(A \cdot B) / C$	[25]	11	$(A / B) \cdot (C / A)$	$\left[\frac{3}{5} \right]$
9	$B \cdot (A / C)$	[25]	12	$(B \cdot A^2 \cdot B^2) / C^3$	$\left[\frac{3125}{3} \right]$
10	$A \cdot B \cdot A^{-1}$	[-35]	13	$(A^2 \cdot C^3) / (C^2 \cdot B^4)$	$\left[-\frac{27}{8575} \right]$

Con l'aiuto del computer studia il rango delle seguenti matrici al variare di k .

14	$\begin{bmatrix} k & 2 & 3 \\ k^2 - 2k & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	[se $k = 0$ o $k = 2$, rango 2; altrimenti rango 3]
15	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k & -1 \\ -2k & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$	[se $k = 1$, rango 2; altrimenti rango 3]
16	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & k \\ k^2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	[se $k = 2$, rango 1; altrimenti rango 2]

Con l'aiuto del computer studia il rango delle seguenti matrici al variare di h e di k .

17	$\begin{bmatrix} h & -1 & 3 \\ k - 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	[se $h = 10 - k$, rango 2; altrimenti rango 3]
18	$\begin{bmatrix} 1 & h & -3 \\ k^2 - k & 1 & -6 \end{bmatrix}$	[se $h = \frac{1}{2}$ e ($k = -1$ o $k = 2$), rango 1; altrimenti rango 2]
19	$\begin{bmatrix} h & -1 & 3 - h \\ k - 4 & 1 & 2k - 1 \\ 3k & 0 & -2 \end{bmatrix}$	[se $k = \frac{2}{3}$ o $k = \frac{h - 4}{2}$, rango 2; altrimenti rango 3]

Date le seguenti equazioni di fasci di coniche, mediante l'uso del computer classifica i tipi di conica in relazione ai valori che può assumere il parametro reale k . Trova gli eventuali punti comuni a tutte le coniche. Traccia i grafici delle coniche corrispondenti ai valori di k indicati a fianco.

20	$(1 - k)x^2 - ky^2 + 2x + 2y = 0,$	k va da -2 a 2 con passo $0,25$. [$k < 0$: ellissi; $k = 0$: parabola; $0 < k < 1$: iperboli; $k = 1$: parabola; $k > 1$: ellissi; (0; 0)]
21	$x^2 - kyx - y + k = 0,$	k va da -4 a 4 con passo 1 . [Tutte iperboli tranne $k = 0$ e $k = -1$: degeneri; (1; 1)]
22	$(9k + 1)x^2 + (1 - 16k)y^2 - 25 = 0,$	$k \in \left\{ -1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{12}, 0, \frac{288}{25}, \frac{2}{7}, 1 \right\}$. [$k < -\frac{1}{9}$: iperboli; $k = -\frac{1}{9}$: degeneri; $-\frac{1}{9} < k < \frac{1}{16}$: ellissi ($k = 0$: circonfer.); $k = \frac{1}{16}$: degeneri; $k > \frac{1}{16}$: iperboli ($k = \frac{2}{7}$: equil.); (4; 3), (4; -3), (-4; 3), (-4; -3)]

23 $6kx + 12(k-1)xy + y^2 + 24x + 24 = 0, \quad k \in \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}.$

$$\left[k < \frac{2}{3} \text{ (} k = -\frac{1}{6} \text{ equil.) e } k > \frac{3}{2} \text{: iperboli; } k = \frac{2}{3} \text{ e } k = \frac{3}{2} \text{: parabole; } \right. \\ \left. \frac{2}{3} < k < 1 \text{ e } \frac{7}{6} < k < \frac{3}{2} \text{: ellissi reali; } k = \frac{2}{3} \text{ e } k = \frac{3}{2} \text{: degeneri; } 1 < k < \frac{7}{6} \text{: ellissi immaginarie;} \right]$$

24 $25(k-1)x^2 - 22ky^2 + 50(k-3)x + 50(2-k)y + 25 = 0, \quad k \in \left\{-1, 0, \frac{1}{6}, \frac{25}{47}, 1, \frac{25}{3}, 9\right\}.$

$$\left[k < 0 \text{ e } k > 1 \text{: iperboli (} k = \frac{25}{3} \text{ equil.); } k = 0 \text{ e } k = 1 \text{: parabole; } 0 < k < 1 \text{: ellissi (} k = \frac{25}{47} \text{ circonf.); } \right. \\ \left. k = 10 \text{ e } k = -\frac{5}{3} \text{ e } k = 2 \text{: degeneri; } (-9, 44; 7, 87), (1, 95; -2, 23), (-1, 03; -1, 53), (0, 43; 0, 43) \right]$$