LABORATORIO DI MATEMATICA
LE SUCCESSIONI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Per verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+11}{2n+7} = 2$, con Excel costruiamo un foglio che, letto un valore $\varepsilon > 0$, permetta la ricerca dell'indice p_ε, tale che per tutti gli $n \geq p_\varepsilon$ valga la disuguaglianza $\left| \frac{4n+11}{2n+7} - 2 \right| < \varepsilon$.

Un procedimento numerico per la ricerca di p_ε

Dopo aver ricevuto il valore di ε, cerchiamo l'indice p_ε con un procedimento numerico, basato sulla potenza di calcolo dell'elaboratore e da usarsi come verifica delle operazioni analitiche.

Implementiamo il procedimento di ricerca in modo che:

- richieda l'inserimento di un coefficiente intero positivo casuale;
- abbini al coefficiente scelto un certo numero di indici consecutivi della successione, più esattamente determini un primo indice moltiplicando il coefficiente per 20 e scriva i venti indici seguenti;
- raccolga in una tabella i valori dei corrispondenti termini della successione;
- ponga a fianco di ognuno di essi un'istruzione condizionale, per cui se la disuguaglianza

$$\left| \frac{4n+11}{2n+7} - 2 \right| < \varepsilon:$$

– non è soddisfatta, mostri l'indicatore =;
– è soddisfatta per la prima volta, mostri l'indicatore <−−;
– è soddisfatta per le volte successive, mostri l'indicatore ==.

Dopo aver attivato il procedimento con un coefficiente casuale, leggiamo gli indicatori: se vediamo che sono tutti =, facciamo ripartire il procedimento con un coefficiente maggiore di quello scelto inizialmente; se sono tutti ==, inseriamo un coefficiente minore. Proseguiamo con i tentativi, scegliendo ogni volta come nuovo coefficiente un valore intermedio fra quello che dà tutti simboli = e quello che dà tutti simboli ==, sino a che non appare il simbolo <−−, che segnala l'indice p_ε.

La costruzione del foglio

- Entriamo in ambiente Excel e scriviamo le didascalie come nella figura 1 a pagina seguente.
- Mettiamo un bordo alle celle C6 e B11, che devono contenere rispettivamente il valore di ε e il coefficiente per la ricerca casuale di p_ε.
- Per ricavare gli indici della successione, scriviamo = B11*20 in E2, = E2 + 1 in E3 e la copiamo sino alla E22.
- Otteniamo i corrispondenti valori dei termini della successione scrivendo = (4*E2 + 11) / (2*E2 + 7) in F2 e copiandola sino alla F22.
- Nella cella G2 inseriamo la formula = SE (ASS(F2 − B4) > = C6; "="; SE(E(ASS((4*(E2 − 1) + 11)/(2*(E2 − 1) + 7) − B4) > = C6; ASS(F2 − B4) < C6); "<−−"; "==")) e la copiamo sino alla cella G22, in modo da controllare se la disuguaglianza non è soddisfatta o se è soddisfatta per la prima volta o per le volte successive.
- Per mostrare l'indice p_ε nella cella C8, quando la ricerca ha successo, inseriamo la formula = SE(G2 = "<−−"; E2; "") in H2 e la copiamo sino alla H22, e la formula = SOMMA(H2:H22) in C8.

L'indice di p_ε corrispondente al valore 0,001 di ε

- Proviamo il foglio con $\varepsilon = 0{,}001$, immettendolo nella cella C6.
- Scegliamo il primo numero casuale, digitiamo 100 in B11 e vediamo nella colonna G che tutti gli indicatori sono uguali a ==. Proviamo con 60, un valore più piccolo e otteniamo tutti =; proseguiamo con 80 ottenendo tutti ==, con 70 tutti =, con 75 tutti == , con 73 tutti =, sino a pervenire con 74 alla forma del foglio di figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Le successioni con Excel				n	a di n		p di ε
2					1480	1,998988877654	=	
3	Le successione (4n+ 11)/(2n+7)				1481	1,998989558774	=	
4	ha limite	2	.		1482	1,998990238977	=	
5					1483	1,998990918264	=	
6	Inserisci il valore di ε		0,001		1484	1,998991596639	=	
7					1485	1,998992274101	=	
8	il valore di p di ε è		1497		1486	1,998992950655	=	
9					1487	1,998993626300	=	
10	Inserisci il coefficiente di ricerca				1488	1,998994301039	=	
11		74			1489	1,998994974874	=	
12					1490	1,998995647807	=	
13					1491	1,998996319839	=	
14					1492	1,998996990973	=	
15					1493	1,998997661209	=	
16					1494	1,998998330551	=	
17					1495	1,998998998999	=	
18					1496	1,998999666556	=	
19					1497	1,999000333222	<--	1497
20					1498	1,999000999001	==	
21					1499	1,999001663894	==	
22					1500	1,999002327902	==	

▲ **Figura 1** Il foglio con il valore 1497 di p_ε corrispondente al valore 0,001 di ε.

- La disuguaglianza $\left|\frac{4n+11}{2n+7}-2\right| < 0{,}001$, quindi, è soddisfatta quando $n \geq 1497$.

Esercitazioni

1 Costruisci un foglio che riceva il numero intero positivo h e che determini il valore del numero di Nepero e con un'approssimazione di 10^{-h}. Utilizza le successioni $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, che tendono a e rispettivamente per difetto e per eccesso.

2 Costruisci un foglio per rappresentare la successione $c_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

3 Costruisci un foglio per determinare la radice quadrata di un numero a utilizzando la successione ricorsiva $r_0 = a, r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{a}{r_n}\right)$. Per controllare il risultato, nel foglio inserisci il calcolo del quadrato della radice approssimata ottenuta.

Per ognuna delle seguenti coppie di successioni, che ammettono lo stesso limite indicato a fianco, costruisci un foglio che, letto un valore per ε, determini quale delle due soddisfa la disuguaglianza $|a_n - l| < \varepsilon$ o $|b_n - l| < \varepsilon$ per prima, cioè quella che ammette l'indice p_ε più piccolo.

4 $a_n = \dfrac{6n^2 + 6}{(n-1)^2}$, $b_n = \dfrac{12n^3 + 1}{2n^3 - 4n^2 - 5n - 6}$, limite comune 6.

5 $a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$, $b_n = \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$, limite comune 0.

6 $a_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, $b_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$, limite comune 0.

Per ognuna delle seguenti coppie di successioni divergenti, costruisci un foglio che, letto un valore per M, determini quale delle due soddisfa la disuguaglianza $|a_n| > M$ o $|b_n| > M$ per prima, cioè quella che ammette l'indice p_M più piccolo.

7 $a_n = n^2 + n$, $b_n = n^3$.

8 $a_n = \dfrac{n^4 + n^3}{n^3 + 1}$, $b_n = n^2 + 1$.

9 Costruisci un foglio per trovare dei valori approssimati di π trasformando in successione la somma infinita $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dots$

Per ognuno dei seguenti problemi sulle progressioni aritmetiche, costruisci un foglio per risolverlo.
Prova il foglio con i dati indicati a fianco. Dopo aver risolto il problema, calcola e rappresenta nel foglio elettronico gli n termini per verifica. Determina poi la somma degli n termini sia con l'operatore SOMMA sia applicando la formula teorica.

10 Dati il primo termine, l'indice n, il termine n-esimo, determina la ragione d. Prova con $a_1 = 5$, $n = 6$, $a_6 = 25$.

11 Dati n, il termine n-esimo, la ragione d, determina il primo termine. Prova con $n = 4$, $a_4 = 8$, $d = 2$.

12 Dati l'indice n, il primo termine, la ragione d, determina il termine n-esimo. Prova con $n = 7$, $a_1 = 39$, $d = -5$.

Opera come negli esercizi precedenti con i seguenti problemi sulle progressioni geometriche.

13 Dati il primo termine, l'indice n, la ragione q, determina il termine n-esimo. Prova con $a_1 = -9$, $n = 5$, $q = -\dfrac{1}{2}$.

14 Dati l'indice n, il termine n-esimo, la ragione q, determina il primo termine. Prova con $n = 8$, $a_8 = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$.

15 Dati il primo termine, l'indice n, il termine n-esimo, determina la ragione q. Prova con $a_1 = 5$, $n = 10$, $a_{10} = 200$.

Per ognuna delle seguenti successioni ricorsive costruisci un foglio per rappresentarne l'andamento e studiarne il limite.

16 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3 - 2a_n}$. [1]

17 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}$. [4]

18 $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$. [$\sqrt{2}$]