LABORATORIO DI MATEMATICA
MASSIMO E MINIMO

ESERCITAZIONE GUIDATA

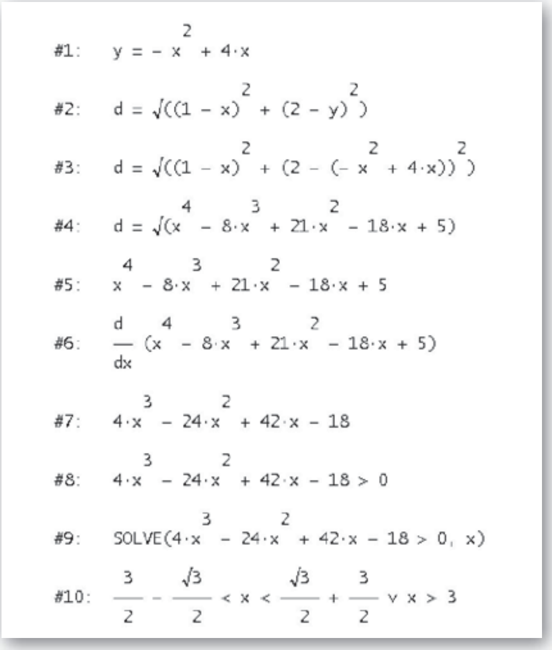
Dato il punto $Q(1; 2)$, determiniamo con l'aiuto del computer le coordinate del punto P appartenente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e avente da Q distanza minima.
Nel medesimo riferimento cartesiano rappresentiamo poi i grafici della parabola e della funzione $d(x)$, che esprime i valori delle distanze di Q dai punti della parabola, il segmento PQ e il punto M, minimo assoluto del grafico di $d(x)$.

L'analisi del problema

Impostiamo la ricerca del punto P scrivendo la formula $d = \sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2}$, che dà la distanza di Q da un punto generico $(x; y)$. Poiché il punto deve appartenere alla parabola, sostituiamo in essa alla y l'espressione $y = -x^2 + 4x$, ricavando la funzione $d(x)$. Osserviamo che la funzione $d(x) = \sqrt{r(x)}$, essendo il radicando maggiore di 0, ha gli stessi estremanti di $r(x)$. Determiniamo e studiamo pertanto per semplicità la derivata di $r(x)$. Attraverso l'esame del suo segno stabiliamo l'andamento qualitativo della $r(x)$, e quindi della $d(x)$. Trovate le ascisse dei punti di minimo, stabiliamo per confronto qual è il minimo assoluto.

La sessione di lavoro

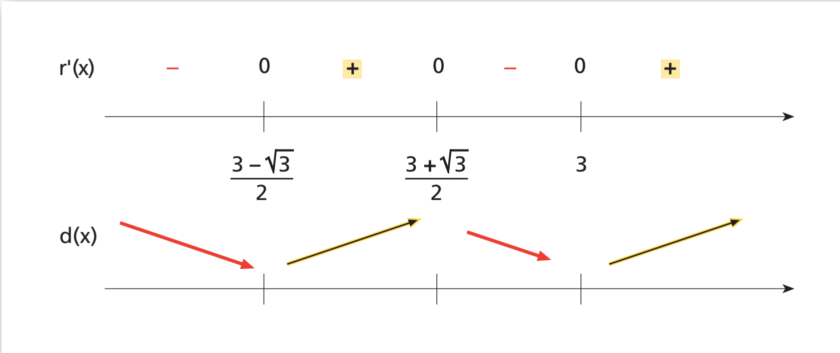
- Con *Crea_Espressione* digitiamo e inseriamo nella zona algebrica l'equazione della parabola e l'espressione della distanza PQ rispettivamente nella #1 e nella #2 (figura 1).
- Per sostituire la y con l'espressione della parabola, applichiamo *Semplifica_Sostituisci variabili* sulla #2, ignoriamo la richiesta di sostituzione della x e della d, facciamo clic sulla #1, sul secondo membro della #1, sul campo di sostituzione della y, battiamo il tasto F3 e usciamo dalla finestra di dialogo con *Semplifica*. Nella #3 compare la sostituzione della y e nella #4 la semplificazione della #3, che rappresenta la $d(x)$.
- Inseriamo il radicando $r(x)$ nella #5, facendo clic sulla #4, all'interno della radice e nella riga di editazione e battendo F3 seguito da INVIO.
- Con il comando *Calcola_Derivata* seguito da *Semplifica*, determiniamo nella #6 l'impostazione e nella #7 l'espressione della derivata di $r(x)$.
- Per porla maggiore di 0, diamo *Crea_Espressione*, battiamo F3, importando nella riga di editazione delle espressioni la $r'(x)$, a fianco di essa digitiamo > 0 e con INVIO immettiamo la disequazione nella #8.
- Applichiamo sulla #8 il comando *Risolvi_Espressione* seguito da *Semplifica*, ottenendo l'impostazione nella #9 e la soluzione della disequazione nella #10.



▲ **Figura 1** Lo studio della distanza di Q dai punti della parabola.

La distanza minima

Riportiamo il risultato di Derive in uno schema (figura 2), dal quale ricaviamo che la $r(x)$, e quindi la $d(x)$, ammettono due punti di minimo. Ritorniamo in ambiente Derive e cerchiamo il minimo assoluto.



◀ **Figura 2** Il segno della derivata di $r(x)$ stabilito con Derive, dal quale ricaviamo l'andamento della $d(x)$.

• Sostituiamo nell'espressione della distanza contenuta nella #4 l'ascissa del primo punto di minimo contenuta nella #10, ottenendo la #11 (figura 3).
• Su di essa diamo *Semplifica_Base* e *Semplifica_Approssima* in modo da ricavare la misura esatta della distanza nella #12 e quella approssimata nella #13.
• Operiamo in modo analogo per l'altra ascissa, determinando nella #15 e nella #16 le misure corrispondenti della distanza. Possiamo quindi dire, per confronto, che l'ascissa del punto P, il più vicino a Q fra quelli appartenenti alla parabola, è la prima.
• Determiniamo l'ordinata di P nella #18, sostituendo a x nella #1 l'ascissa trovata.

#11: $d=\sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-8\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+21\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-18\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+5\right)}$

#12: $d = \sqrt{\left(\frac{11}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)}$

#13: $d = 0.3897740225$

#14: $d = \sqrt{(3^4 - 8\cdot 3^3 + 21\cdot 3^2 - 18\cdot 3 + 5)}$

#15: $d = \sqrt{5}$

#16: $d = 2.236067977$

#17: $y = -\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

#18: $y = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

▲ **Figura 3** La distanza minima e le coordinate del punto *P*.

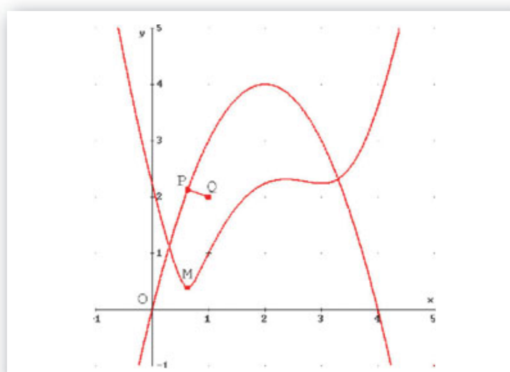
Il grafico

• Per costruire il grafico richiesto aggiungiamo, nella zona algebrica, l'etichetta #19 (figura 4), con le coordinate degli estremi del segmento PQ, e l'etichetta #20, con le coordinate di M (l'ascissa di M è quella di P e l'ordinata è nella #12).
• Passiamo poi alcune volte dall'ambiente algebrico all'ambiente grafico a due dimensioni e viceversa, rispettivamente con i bottoni *Finestra_Grafici2D* e *Finestra_Algebra*. Nell'ambiente algebrico evidenziamo, una alla volta, l'equazione della parabola in #1, l'equazione della distanza in #4, le coordinate degli estremi del segmento QP in #19, le coordinate del punto di minimo assoluto M in #20. Nell'ambiente grafico usiamo il bottone *Traccia il grafico* (figura 5).
• Inseriamo nel disegno i nomi dei punti con *Inserisci_Annotazione.*
• Scegliamo la zona del piano cartesiano più interessante da rappresentare sullo schermo: diamo *Imposta_Intervallo del grafico*, e, nella tendina, selezioniamo *Minimo/massimo*. Nella finestra di dialogo

#19: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

#20: $\left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\left(\frac{11}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)}\right]$

▲ **Figura 4** I dati per il grafico.



▲ **Figura 5** I grafici della parabola con la posizione del punto *P* più vicino a *Q* e di $d(x)$ con il minimo assoluto *M*.

scriviamo -1, 5 e 6 nei campi *Minimo*, *Massimo* e *Intervalli* per l'asse x e gli stessi valori nei campi per l'asse y.
- Rendiamo monometrico il sistema cartesiano con il comando *Imposta_Rapporto d'aspetto* seguito da *Resetta*.

Esercitazioni

Analizza i seguenti problemi e risolvili con l'aiuto del computer. Per verifica, costruisci un grafico.

1 Le parabole di equazioni $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ si intersecano rispettivamente nei punti A e B e incontrano la retta di equazione $x = k$ nei punti C e D. Supponendo che la retta vari all'interno di AB, determina k in modo che sia massima l'area del triangolo OCD, dove O è l'origine degli assi. $\left[-\frac{3+\sqrt{93}}{12}\right]$

2 La retta di equazione $y = x + h$ incontra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in A e in B e l'asse y in C. Il punto D ha coordinate $(0; 1)$. Trova h in modo che il prodotto $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ sia massimo. $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right]$

3 Determina h in modo che la funzione $f(x) = \frac{hx}{(x-1)^2}$ ammetta un estremante di ordinata 1. $[-4]$

4 Trova a, b e c in modo che la funzione $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x}$ passi per $P(-2; 6)$ e abbia un estremante in $M(-1; 4)$. $[1, 1, -2]$

5 Determina h e k in modo che la funzione $f(x) = (x-h)(x-k)e^{-x}$ abbia due estremanti rispettivamente nei punti di ascissa 1 e 3. $[1, 1]$

6 Detti A e B (A quello di ascissa minore) i punti di intersezione della retta di equazione $y = k$ con la parabola di equazione $y = -x^2 + 3x - 2$ e C e D (D quello di ascissa maggiore) quelli con la parabola di equazione $y = x^2 - 4$, trova k in modo che la corda AD abbia lunghezza massima. $\left[-\frac{15}{8}\right]$

7 La parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ incontra l'asse x nell'origine degli assi O e in A. Determina le coordinate del punto P, appartenente all'arco $\overset{\frown}{OA}$ della parabola, che abbia distanza massima da O. $[P(6-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+5)]$

8 La parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 10$ incontra l'asse x in A e in B e l'asse y in C. Determina un punto P sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ della parabola in modo che, dette H la proiezione di P sull'asse x e O l'origine degli assi, il trapezio $OCPH$ abbia la superficie massima. $\left[P\left(\frac{8+2\sqrt{46}}{3}; \frac{62+8\sqrt{46}}{9}\right)\right]$

9 Le curve di equazioni $y = -x^3 + 4x$ e $y = \frac{3}{x}$ si intersecano nei punti A e B del terzo quadrante e nei punti C e D del primo. Considera una retta parallela all'asse y, $x = h$, che varia da C a D e incontra le due curve rispettivamente nei punti E e F. Determina h in modo che il segmento EF abbia lunghezza massima. $\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}\right]$

10 Trova un punto P sulla curva di equazione $y = -x^3 + 3x^2$ e appartenente al primo quadrante, tale che risulti massima la somma $\overline{OH} + \overline{PH}$, dove H è la proiezione di P sull'asse x e O è l'origine.

$\left[P\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; \frac{18+10\sqrt{3}}{9}\right)\right]$

Per ognuna delle seguenti funzioni scrivi un programma nel linguaggio di Derive che legga il valore del parametro *k* e determini tutti gli eventuali punti di minimo e di massimo della *f*(*x*).
Prova il programma con i valori suggeriti per il parametro *k*.
Per verifica traccia il grafico delle corrispondenti funzioni.

11 $f(x) = \frac{x-2}{x^2-k}$, prova con $k = 3$, con $k = -5$, con $k = 9$.

$\left[\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(3; \frac{1}{6}\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(5; \frac{1}{10}\right); \text{non esistono}\right]$

12 $f(x) = \frac{x^2-k}{x-4}$, prova con $k = 7$, con $k = -9$, con $k = 25$.

[(1; 2), (7; 14); (−1; −2), (9; 18); non esistono]

13 $f(x) = \frac{x^2-k}{x^2-1}$, prova con $k = -1$, con $k = 4$, con $k = 1$.

[(0; −1); (0; 4); la funzione è costante]

Svolgi l'analisi di ognuno dei seguenti problemi, da essa ricava un algoritmo risolutivo, traducilo nel linguaggio di programmazione di Derive, applicalo nei casi richiesti.

14 Data la parabola p di equazione $y = -x^2 + bx$ e assegnato un valore al coefficiente b, determina il perimetro massimo che può assumere il rettangolo inscritto nel segmento parabolico formato da p e dall'asse x. Assegna a b i valori -6, 2 e 4. [20, 4 (il rettangolo è degenere), 10]

15 Date le parabole di equazioni $y = -x^2 + bx - 6$ e $y = x^2 - 3x - 4$ e assegnato un valore al parametro b, detti A e B gli eventuali punti di intersezione fra le parabole, determina l'equazione della retta parallela all'asse y e interna all'intervallo AB, tale che stacchi sulle due parabole una corda di lunghezza massima. Indica anche la misura d di tale corda. Assegna a b i valori -7, -6 e 5.

[$x = -1$ e $d = 0$; i punti A e B non esistono; $x = 2$ e $d = 6$]