

## LABORATORIO DI MATEMATICA

## LO STUDIO DELLE FUNZIONI

## ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la seguente famiglia di funzioni nella variabile reale  $x$ , con il parametro  $k$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{kx - 4},$$

costruiamo un foglio che, ricevuto un valore del parametro, permetta di ottenere:

- il dominio della funzione,
- le coordinate degli eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani,
- le equazioni degli eventuali asintoti,
- le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
- i grafici della funzione e degli asintoti dopo aver inserito gli estremi di variazione della  $x$ .

## L'analisi del problema

a) Se  $k \neq 0$ , il dominio della funzione è  $x \neq \frac{4}{k}$ ; se  $k = 0$ , è dato da  $\mathbb{R}$  (il grafico della funzione diventa una parabola).

b) Notiamo che tutte le funzioni intersecano l'asse  $y$  in  $(0; 1)$ . Intersezioni con l'asse  $x$ :  $x^2 - 4 = 0$  con  $kx - 4 \neq 0$ , da cui  $x = \pm 2$ , per  $\pm 2k - 4 \neq 0$ , cioè  $k \neq -2$  e  $k \neq 2$ . Quindi, se  $k \neq -2$  e  $k \neq 2$ , le intersezioni con l'asse  $x$  sono  $(-2; 0)$  e  $(2; 0)$ . Se  $k = -2$  o  $k = 2$ , il grafico della funzione diventa quello di una retta con un punto di discontinuità di terza specie in  $(\frac{4}{k}; 0)$ .

Proseguiamo lo studio delle funzioni escludendo i valori  $-2, 0, 2$  del parametro  $k$  che portano ai casi particolari visti.

c) Calcoliamo,  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{k}} \frac{x^2 - 4}{kx - 4} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(kx - 4)} = \frac{1}{k}$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4}{kx - 4} - \frac{1}{k}x \right) = \frac{4}{k^2}$ , ottenendo le

equazioni dell'asintoto verticale  $x = \frac{4}{k}$  e dell'asintoto obliquo  $y = \frac{1}{k}x + \frac{4}{k^2}$ .

d) Determiniamo la derivata prima  $f'(x) = \frac{kx^2 - 8x + 4k}{(kx - 4)^2}$  e, per discuterla, calcoliamo il discriminante

del numeratore  $\frac{\Delta}{4} = \Delta_{quarti} = 16 - 4k^2$ . Se  $\Delta_{quarti} > 0$ , cioè  $-2 < k < 2$ , il grafico ammette due

punti estremanti, le cui ascisse sono  $x_1 = \frac{4 - \sqrt{\Delta_{quarti}}}{k}$  e  $x_2 = \frac{4 + \sqrt{\Delta_{quarti}}}{k}$ .

- Se  $\Delta_{quarti} > 0$  e  $k > 0$ , cioè se  $0 < k < 2$ , la funzione è crescente per valori esterni all'intervallo  $[x_1; x_2]$  ed è decrescente per valori interni, quindi la funzione ha un massimo in  $x_1$  e un minimo in  $x_2$ .
- Se  $\Delta_{quarti} > 0$  e  $k < 0$ , cioè se  $-2 < k < 0$ , la funzione è crescente per valori interni all'intervallo  $[x_2; x_1]$  (se  $k < 0$ ,  $x_2 < x_1$ ) ed è decrescente per valori esterni, quindi ha ancora un minimo in  $x_2$  e un massimo in  $x_1$ .
- Se  $\Delta_{quarti} < 0$  e  $k > 0$ , cioè se  $k > 2$ , la funzione è sempre crescente.
- Se  $\Delta_{quarti} < 0$  e  $k < 0$ , cioè se  $k < -2$ , la funzione è sempre decrescente.

Il caso  $\Delta_{quarti} = 0$  porta a  $k = -2$  o  $k = 2$ , situazioni che abbiamo già considerato.

## La struttura del foglio

- Scriviamo le didascalie per ricordare il testo del problema, per indicare dove inserire il valore del parametro  $k$  (nella cella bordata D3) e per leggere i risultati.
- Imponiamo al sistema di rappresentare numeri con quattro cifre decimali, evidenziando la zona del foglio A1:D22 e usando il comando *Formato Celle Numero*.



- Assegniamo alla cella D3 il nome  $k$  e alla cella D18 il nome  $\text{deltaq}$  digitandoli nel campo *Casella del nome*.
- Basandoci sull'analisi svolta immettiamo le formule di Excel con le istruzioni condizionali, che selezionano i vari casi possibili.
- Per fornire il risultato del dominio, digitiamo = SE(k = 0; "R"; "x diverso da") in B5 e = SE(k = 0; ""; 4/k) in C5.
- Selezioniamo il tipo di funzione scrivendo = SE(O(k = - 2; k = 2); "retta"; SE(k = 0; "parabola"; "funzione razionale fratta")) in C7.
- Precisiamo le intersezioni con l'asse  $x$  digitando = SE(C7 = "retta"; "ha ascissa"; "hanno ascisse") in C11 e formule con lo stesso controllo in A12, B12 e C12.
- Per lasciare vuote le celle adibite a mostrare i risultati degli asintoti e della crescita della funzione, nei casi particolari, digitiamo all'inizio di ogni formula la condizione = SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; "..."). Per esempio, scriviamo = SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; "Gli asintoti hanno equazione:") in A14. Istruzioni analoghe vanno in A15, B15, D15, A16, B16, C16, D16.
- Per distinguere i vari casi di crescita e di decrescenza di  $f(x)$ , calcoliamo il discriminante  $\frac{\Delta}{4}$  del numeratore della derivata prima. Nella cella D18 (quella che abbiamo chiamato  $\text{deltaq}$ ) digitiamo = SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; 16 - 4\*k^2) e facciamo poi dipendere le uscite delle celle seguenti dal valore di  $\text{deltaq}$ .

	Digitiamo	in
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; "La funzione")		A19
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; "ha un massimo in"; SE(k > 0; "è sempre crescente"; "è sempre decrescente")))		B19
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; (4 - RADQ(deltaq))/k; ""))		B20
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; (B20^2 - 4)/(k*B20 - 4); ""))		D20
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2; deltaq < 0); ""; "La funzione")		A21
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; "ha un minimo in"; ""))		B21
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; (4 + RADQ(deltaq))/k; ""))		B22
= SE(O(k = 0; k = - 2; k = 2); ""; SE(deltaq > 0; (B22^2 - 4)/(k*B22 - 4); ""))		D22

**L'uso del foglio**

- Proviamo il foglio con un valore di  $k$ , scrivendo = - 8/5 in D3. Otteniamo il foglio della figura 1.

	k = -8/5			
	A	B	C	D
1	Lo studio delle funzioni $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(k*x-4)}$			
2				
3	Inserisci il valore del parametro k:			-1,6000
4				
5	Il dominio è x diverso da		-2,5000	
6				
7	L'equazione è quella di una		funzione razionale fratta	
8	con il punto di discontinuità		x =	-2,5000
9				
10	L'intersezione con l'asse y ha ordinata			1,0000
11	Le intersezioni con l'asse x hanno ascisse			
12	-2,0000	e	2,0000	
13				
14	Gli asintoti hanno equazione:			
15	x =	-2,5000	e	
16	y =	-0,6250	* x +	1,5625
17				
18	Il discriminante della derivata prima vale			5,7600
19	La funzione ha un massimo in			
20	(	-1,0000	;	1,2500 )
21	La funzione ha un minimo in			
22	(	-4,0000	;	5,0000 )

► **Figura 1** Il foglio dopo l'inserimento del valore  $-\frac{8}{5}$  nella casella D3 alla quale abbiamo assegnato il nome  $k$ .

### Le tabelle per ricavare il grafico

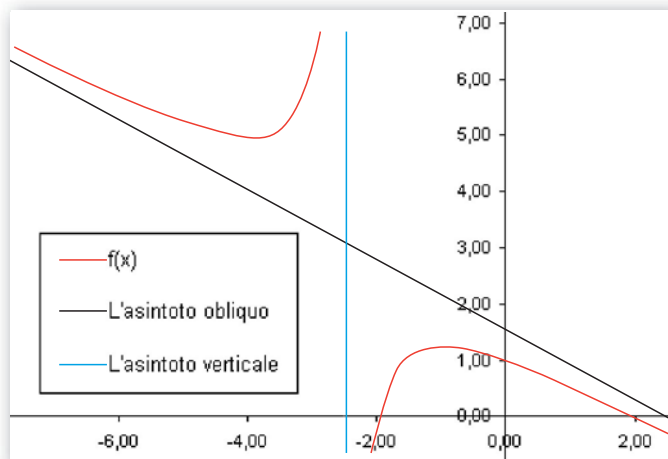
- Costruiamo le tabelle con i valori della  $x$  e i corrispondenti valori della  $f(x)$  in *Foglio2*: una con i valori a sinistra del punto di discontinuità, una con i valori a destra. Inoltre determiniamo per ognuno dei due asintoti le coordinate di due dei loro punti agli estremi dell'area visibile del grafico.
- Richiediamo, come dato d'ingresso, l'incremento della  $x$  nella cella D5 di *Foglio2*.
- Importiamo da *Foglio1* il punto di discontinuità delle funzioni digitando = Foglio1!\$C\$5 nella cella D3.
- Per il ramo a sinistra del punto di discontinuità scriviamo = D3 - D5 in A9, = A9 - \$D\$5 in A10 e la copiamo sino alla cella A21, = (A9^2 - 4)/(Foglio1!\$D\$3\*A9 - 4) in B9 la copiamo sino alla cella B21. Operiamo in modo simile con la tabella per il ramo a destra dell'asintoto.
- Digitiamo = A21 in A25, = Foglio1!\$B\$16\*A25 + Foglio1!\$D\$16 in B25, = C21 in A26 e = Foglio1!\$B\$16\*A26 + Foglio1!\$D\$16 in B26, per determinare due punti appartenenti all'asintoto obliquo.
- Scriviamo = D3 in C25, = MIN(B9:B21; D9:D21; B25:B26) in D25, = D3 in C26, = MAX(B9:B21; D9:D21; B25:B26) in D26, per determinare due punti dell'asintoto verticale.
- Immettiamo 0,4 in D5 e le tabelle si aggiornano come in figura 2.

### Il grafico

- Evidenziamo la zona del foglio A8:B21 (quella del ramo del grafico della funzione a sinistra dell'asintoto verticale) e facciamo clic sul bottone *Autocomposizione grafico*.
- Scegliamo il tipo di grafico: *Dispers.(XY), Dispersione con coordinate unite da linee smussate e senza indicatori di dati*.
- Nella seconda finestra di dialogo sfruttiamo la possibilità di unire più grafici nello stesso riferimento cartesiano per rappresentare il ramo a destra dell'asintoto e i due asintoti. Facciamo clic sul bottone *Aggiungi* e importiamo nel campo *Valori della x* quelli contenuti nella zona C9:C21 e nel campo *Valori della y* quelli contenuti nella zona D9:D21.

	A	B	C	D
1	Le tabelle per i grafici			
2				
3	Il punto di discontinuità è in $x =$			-2,50
4				
5	Inserisci l'incremento della $x$			0,40
6				
7	I due rami della funzione			
8	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
9	-2,90	6,89	-2,10	-0,64
10	-3,30	5,38	-1,70	0,87
11	-3,70	5,05	-1,30	1,20
12	-4,10	5,00	-0,90	1,25
13	-4,50	5,08	-0,50	1,17
14	-4,90	5,21	-0,10	1,04
15	-5,30	5,38	0,30	0,87
16	-5,70	5,56	0,70	0,69
17	-6,10	5,77	1,10	0,48
18	-6,50	5,98	1,50	0,27
19	-6,90	6,19	1,90	0,06
20	-7,30	6,42	2,30	-0,17
21	-7,70	6,65	2,70	-0,40
22				
23	L'asintoto obliquo		L'asintoto verticale	
24	$x$	$y$	$x$	$y$
25	-7,70	6,38	-2,50	-0,64
26	2,70	-0,13	-2,50	6,89

▲ Figura 2 Le tabelle per i grafici della funzione e degli asintoti contenute in *Foglio 2*.



▲ Figura 3 I grafici dei due rami della funzione, corrispondente al valore  $k = -\frac{8}{5}$ , e dei due asintoti.

- Operiamo similmente per aggiungere il grafico dell'asintoto obliquo, tenendo presente le zone nelle quali abbiamo determinato le coordinate di due dei suoi punti, la A25:A26 e la B25:B26. Scriviamo l'asintoto obliquo nel campo *Nome* per farlo riportare da Excel nella *Legenda*. Aggiungiamo pure l'asintoto verticale, ricordando le zone con le coordinate di due dei suoi punti, la C25:C26 e la D25:D26.
- Togliamo la griglia dei valori e vediamo in *Grafico1* il grafico di figura 3.
- Possiamo rappresentare un'altra funzione facendo clic su *Foglio1* e digitando un altro valore per il parametro  $k$ , esclusi quelli dei casi limite.

## Esercitazioni

Usa lo strumento informatico che hai a disposizione per svolgere una discussione completa sullo studio delle seguenti famiglie di funzioni, in relazione ai valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$ . Sul quaderno, poi, studia (in modo indipendente) la funzione che ottieni sostituendo i valori indicati del parametro e confronta i tuoi risultati con quelli del computer.

**1**  $f(x) = \frac{k-1}{x^2} - kx, \quad k = 1, k = 7.$

**2**  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + k}{x}, \quad k = 1, k = 3.$

**3**  $f(x) = \sqrt{x^2 - k} - 2x, \quad k = -1, k = 1.$

**4**  $f(x) = \frac{x+3}{\ln(x+3)} + k, \quad k = -e, k = -4.$

**5**  $f(x) = x^4 - 2kx^2 + 2k + 3, \quad k = 3, k = 5.$

**6**  $f(x) = e^{\frac{kx-1}{x-k}}, \quad k = 1, k = 2.$

Per ognuna delle seguenti famiglie di funzioni, nella variabile reale  $x$  e parametro  $h \in \mathbb{Z}$ , opera in modo simile a quello proposto nelle esercitazioni precedenti.

**7**  $f(x) = (x-1)^h e^{-x}, \quad h = -1, 0, 2.$

**8**  $f(x) = \sin x + h \cos x, \quad h = 0, 1, 2.$

**9**  $f(x) = \frac{(x-1)^h}{x+2}, \quad h = -1, 1, 2.$

**10**  $f(x) = (2x+1)^h \ln(2x+1), \quad h = -1, 0, 1.$

Con l'aiuto del computer, realizza una sessione di lavoro in cui, dopo aver ricevuto il valore del parametro  $k$ , si trovino le coordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativi, per ognuna delle seguenti funzioni.

**11**  $f(x) = (k-1)x^4 + kx^3$

**12**  $f(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 + 1}$

**13**  $f(x) = (x^2 - kx - 2k - 3)e^{-x}$

Come nelle esercitazioni precedenti, determina l'equazione e gli asintoti delle seguenti funzioni.

**14**  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{kx^2 + x}$

**15**  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{(k-1)x^2 + 2x - k}$

**16**  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{kx + 1}$

Per ognuna delle seguenti funzioni, costruisci una sessione di lavoro al computer che, dopo aver ricevuto il valore della grandezza indicata, trovi, se esistono, quelli delle grandezze richieste e dia la possibilità di ottenere un grafico per verifica.

**17** Data  $f(x) = (x - a) \ln(a - x)$  e assegnata l'ascissa  $x_M$  del punto di massimo  $M$  del grafico di  $f$ , determina il valore di  $a$ , l'ordinata di  $M$  e l'intersezione  $A$  con l'asse  $x$ . Prova con  $x_M = 2 - e^{-1}$ .  $[a = 2, y_M = 0,3679, A(1; 0)]$

**18** Data  $g(x) = 1 + ax^2 - \frac{1}{x}$  e assegnata l'ascissa  $x_T$  del punto  $T$ , dove la tangente al grafico di  $g$  è parallela alla retta  $y = -4x$ , determina il valore di  $a$ , l'ordinata di  $T$  e l'equazione della tangente. Prova con  $x_T = -1$ .  
 $[a = 2,50, y_T = 4,50, y = -4,00x + 0,50]$

**19** Data  $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 1}$  e assegnato il coefficiente  $m$  della retta  $y = mx$ , parallela alla tangente del grafico di  $f$  nel punto  $T$ , di ascissa 2, determina il valore di  $a$ , l'ordinata di  $T$  e l'equazione della tangente. Prova con  $m = \frac{8}{5}$ .  
 $[a = 9, y_T = -1, y = 1,60x - 4,20]$