# LABORATORIO DI MATEMATICA

## GLI INTEGRALI INDEFINITI

**ESERCITAZIONE GUIDATA**

### Problema

**Costruiamo un foglio che, dopo aver ricevuto i valori dei coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$ della funzione $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (con $c \neq 0$) e le coordinate di un punto $P(x_P; y_P)$, stabilisca il dominio di $f(x)$ e trovi $g(x)$, l'eventuale primitiva di $f(x)$ passante per $P$.**
**Nel foglio determiniamo poi per verifica alcuni valori di $g'(x)$ e li confrontiamo con quelli di $f(x)$.**
**Proviamo il foglio con $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 4$ e $P(1; -7 \ln 5)$.**

### L'analisi del problema

Osserviamo che, se $c \neq 0$, $f(x)$ è una funzione razionale fratta con il dominio dato da $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Per integrare la funzione, raccogliamo $\dfrac{a}{c}$ e aggiungiamo e togliamo al numeratore $\dfrac{d}{c}$,

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \int \frac{x + \dfrac{d}{c} - \dfrac{d}{c} + \dfrac{b}{a}}{x + \dfrac{d}{c}}\, dx,$$

decomponiamo la frazione, semplifichiamo e integriamo:

$$\frac{a}{c} \int \left[1 + \frac{bc - ad}{a(cx+d)}\right] dx = \frac{a}{c} x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln|cx + d| + \text{cost}.$$

Determiniamo $g(x)$ imponendo la condizione di passaggio per $P$ e individuando il valore della costante indeterminata:

$$\text{cost} = y_P - \frac{a}{c} x_P - \frac{bc - ad}{c^2} \ln|cx_P + d|.$$

Per calcolare i valori della derivata di $g(x)$ applichiamo la formula $g'(x) \cong \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$, con $h$ «sufficientemente piccolo».

### La costruzione del foglio

- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle B3, D3, B5, D5, B7 e D7 per indicare dove immettere i valori dei coefficienti di $f(x)$ e le coordinate del punto $P$.
- Scriviamo nel foglio i simboli degli operatori della $g(x)$ (noti dall'analisi del problema) a fianco delle celle nelle quali vengono elaborati i corrispondenti coefficienti numerici (figura 1).
- Scriviamo = SE(B5 = 0; "Il coefficiente in B5 deve essere diverso da 0"; "=") in G3 per il controllo del coefficiente $c$, = SE(B5 = 0; ""; − D5/B5) in J5 per stabilire il dominio di $f(x)$, = SE(B7 = J5; "Il punto P non è accettabile"; "=") in G7 per il controllo del punto $P$.
- Calcoliamo i coefficienti della primitiva $g(x)$ rispettivamente con le formule = B3/B5 in B9, = (B5*D3 − B3*D5)/B5^2 in D9, = B5 in F9, = D5 in H9.
- Determiniamo la costante cost scrivendo
= D7 − B3/B5*B7 − (B5*D3 − B3*D5)/B5^2*LN(ASS(B5*B7 + D5)) in J9.

### Il caso proposto dal problema

- Proviamo il foglio immettendo i coefficienti di $f(x)$, cioè 1 in B3, $-3$ in D3, 1 in B5 e 4 in D5, e le coordinate di $P$, cioè 1 in B7 e = − 7*LN(5) in D7. Excel calcola i coefficienti della primitiva $g(x)$ e li mostra come in figura 1.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Gli integrali indefiniti con Excel | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | 1 | * x + | -3 | | | = | | | | |
| 4 | f(x) = | ---------------------------------------------- | | | | | | | | | |
| 5 | | 1 | * x + | 4 | | | Il dominio di f(x) è R - { | | | -4 | } |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| 7 | P( | 1 | ; | -11,2661 | ) | | = | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | g(x) = | 1 | * x + | -7 | * ln \| | 1 | *x + | 4 | \| + | -1 | |

▲ **Figura 1** Il foglio con la funzione $f(x)$ e una sua primitiva $g(x)$.

### La verifica

- Per svolgere la verifica proposta dal problema richiediamo gli estremi $x_1$ e $x_2$ di un intervallo $I$, controlliamo che $I$ appartenga al dominio di $f(x)$, facciamo variare $x$ in $I$ e calcoliamo i corrispondenti valori di $g'(x)$ e di $f(x)$.
- Indichiamo dove immettere gli estremi $x_1$ e $x_2$ di $I$ e l'incremento $h$ inserendo delle didascalie e mettendo dei bordi alle celle B11, B13 e B19.
- Controlliamo gli estremi di $I$ scrivendo = SE(B11 ≤ B13; SE(O(B11 > J5; B13 < J5); "I appartiene al dominio di f(x)"; "I non appartiene al dominio di f(x)"); "Gli estremi di I non sono corretti") in A15.
- Determiniamo il passo di $x$ con la formula = (B13 − B11)/10 in B17.
- Per ottenere i valori di:
- $x$, scriviamo = B11 in F12, = F12 + $B$17 in F13 e la copiamo sino alla F22;
- $g'(x)$, scriviamo = ($B$9*(F12 + $B$19) + $D$9*LN(ASS($F$9*(F12 + $B$19) + $H$9)) − ($B$9*F12 + + $D$9*LN(ASS($F$9*F12 + $H$9))))/$B$19 in H12 e la copiamo sino alla H22;
- $f(x)$, scriviamo = ($B$3*F12 + $D$3)/($B$5*F12 + $D$5) in J12 e la copiamo fino alla J22.
- Facciamo una prova immettendo −1 in B11, 7 in B13 e 0,001 in B19 (figura 2). Notiamo che i valori di $g'(x)$ si discostano di poco da quelli di $f(x)$. Possiamo migliorare l'approssimazione con un valore più piccolo per $h$.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | | | | | | | | |
| 11 | x1 = | -1 | | | | x | | g'(x) | | f(x) | |
| 12 | | | | | | -1 | | -1,33294 | | -1,33333 | |
| 13 | x2 = | 7 | | | | -0,2 | | -0,84186 | | -0,84211 | |
| 14 | | | | | | 0,6 | | -0,52157 | | -0,52174 | |
| 15 | I appartiene al dominio di f(x) | | | | | 1,4 | | -0,29618 | | -0,2963 | |
| 16 | | | | | | 2,2 | | -0,12894 | | -0,12903 | |
| 17 | p = | 0,8 | | | | 3 | | 7,14E-05 | | 0 | |
| 18 | | | | | | 3,8 | | 0,102622 | | 0,102564 | |
| 19 | h = | 0,001 | | | | 4,6 | | 0,186094 | | 0,186047 | |
| 20 | | | | | | 5,4 | | 0,255359 | | 0,255319 | |
| 21 | | | | | | 6,2 | | 0,313759 | | 0,313725 | |
| 22 | | | | | | 7 | | 0,363665 | | 0,363636 | |
| 23 | | | | | | | | | | | |

▲ **Figura 2** Il foglio con i valori di $g'(x)$ e di $f(x)$ a confronto per verifica.

## Esercitazioni

**Per ognuno dei casi seguenti, con l'aiuto del computer, trova la primitiva $g(x)$ della funzione $f(x)$ che passi per il punto indicato. In un medesimo riferimento cartesiano traccia i grafici di $g(x)$, di $f(x)$ e di $f'(x)$, evidenziando alcune delle rispettive caratteristiche.**

**1** $f(x) = \ln(x+4)$, $P(0; 8\ln 2)$. $[g(x) = (x+4)\ln(x+4) - x]$

**2** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $P\left(1; 1+\dfrac{\pi}{8}\right)$. $[g(x) = 0,5\mathrm{arctg}(0,5x+0,5)+1]$

**3** $f(x) = \dfrac{x^2-x-20}{x-1}$, $P(0; 1)$. $[g(x) = -20\ln|x-1| + 0,5x^2 + 1]$

**Per ognuno dei casi seguenti, dopo aver svolto l'analisi, costruisci un foglio che:**
**a) permetta di inserire i valori dei coefficienti della funzione $f(x)$ (con $a \neq 0$) e le coordinate di un punto $P(x_0; y_0)$;**
**b) stabilisca il dominio della $f(x)$;**
**c) determini l'eventuale primitiva $g(x)$ di $f(x)$ passante per $P$;**
**d) calcoli alcuni valori della $g'(x)$ con procedimento numerico e li confronti con quelli della $f(x)$ corrispondenti alle medesime $x$;**
**e) trovi, se esistono, i punti richiesti della $g(x)$.**
**Prova il foglio con i dati indicati a fianco.**
**Dopo aver letto la $g(x)$ trovata da Excel, determina sul quaderno i punti richiesti.**

**4** $f(x) = ax + b$, le intersezioni con l'asse $x$ e l'estremante. $a = 2$, $b = -5$ e $P\left(1; -\dfrac{7}{4}\right)$.
$[g(x) = x^2 - 5x + 2,25; (0,5; 0), (4,5; 0), (2,5; -4)]$

**5** $f(x) = ax^2 + bx + c$, gli estremanti e il flesso. $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$ e $P\left(2; -\dfrac{55}{3}\right)$.
$[g(x) = 0,3333x^3 - 1,5x^2 - 10x + 5; (-2; 16,33330), (5; -40,8333), (1,5; -12,25)]$

**6** $f(x) = \dfrac{b}{ax+c}$, l'intersezione con l'asse $y$. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ e $P(-2; 2)$.
$[g(x) = 2\ln|x+3| + 2;\ (0; 4,1972)]$

**7** $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$, gli estremanti. $a = 1$, $b = -1$, $c = -20$ e $P(0; 1)$.
$[g(x) = -20\ln|x-1| + 0,5x^2 + 1;\ (-4; -23,1888), (5; -14,2259)]$

**8** $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-1}$, l'estremante. $a = 1$, $b = -2$ e $P\left(2; \dfrac{3\ln 3}{2}\right)$.
$[g(x) = -0,5\ln|x-1| + 1,5\ln|x+1|;\ (2; 1,6479)]$

**9** $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{ax+b}$, l'estremante. $a = 1$, $b = -2$ e $P\left(3; \dfrac{75}{2}\right)$.
$[g(x) = 9\ln|x-2| + 0,3333x^3 + 1,5x^2 + 5x;\ (1; 6,8333)]$

**10** $f(x) = \sqrt{ax+c}$, l'intersezione con l'asse $y$. $a = 1$, $c = 4$ e $P\left(-3; -\dfrac{4}{3}\right)$.
$[g(x) = 0,6667\sqrt{(x^3+12x^2+48x+64)} - 2;\ (0; 3,3333)]$

**11** $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, gli asintoti.

Caso 1: $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$ e $P(3; 1)$. $[g(x) = 0{,}5\ln|x-4| - 0{,}5\ln|x-2| + 1;\ x = 2, x = 4, y = 1]$

Caso 2: $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ e $P\left(1; 1 + \dfrac{\pi}{8}\right)$. $[g(x) = 0{,}5 \text{ arctg } (0{,}5x + 0{,}5) + 1;\ y = 1{,}7854, y = 0{,}2146]$

Caso 3: $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$ e $P\left(4; \dfrac{5}{6}\right)$. $\left[g(x) = -\dfrac{1}{(x+2)} + 1; x = -2, y = 1\right]$

**12** $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$, l'estremante. $a = 1$, $b = 1$ e $P(0; 1)$. $[g(x) = \text{arctg } x + 0{,}5 \ln(x^2 + 1) + 1; (-1; 0{,}5612)]$

**13** $f(x) = \dfrac{a}{b + \sqrt{x}}$, il punto di ascissa 2. $a = 1$, $b = 1$ e $P(0; -1)$.
$[g(x) = -2\ln(\sqrt{x} + 1) + 2\sqrt{x} - 1; (2; 0{,}0657)]$

**14** $f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}$, le intersezioni con l'asse $x$. $a = -1$ e $P(1; 2)$.
$[g(x) = -\sqrt{1 + x^2} + 3{,}41421; (3{,}2645; 0), (-3{,}2645; 0)]$

**15** $f(x) = \ln(ax + b)$, l'estremante. $a = 1$, $b = 4$ e $P(0; 8 \ln 2)$. $[g(x) = (x + 4)\ln(x + 4) - x; (-3; 3)]$

**16** $f(x) = (x^2 - 1)e^{ax}$, gli estremanti. $a = -1$ e $P(0; 1)$. $[g(x) = 2 - e^{-x}(x^2 + 2x + 1); (-1; 2), (1; 0{,}5284)]$

**17** $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, l'estremante. $a = -5$, $b = 4$ e $P(-1; 2 - 4e)$. $[g(x) = e^{-x}(5x + 1) + 2; (0{,}8; 4{,}2466)]$