

LABORATORIO DI MATEMATICA

IL CALCOLO COMBINATORIO

Nella seguente tabella gli operandi fra parentesi tonde sono numeri o riferimenti a celle.

Per ottenere	usiamo l'operatore di Excel
le combinazioni semplici di n elementi di classe k ,	COMBINAZIONE(n ; k)
le combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k ,	COMBINAZIONE($n + k - 1$; k)
le disposizioni semplici di n elementi di classe k ,	PERMUTAZIONE(n ; k)
le disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k ,	n^k
le permutazioni semplici di n elementi,	FATTORIALE(n)
le permutazioni di n elementi di cui h , k e j ripetuti,	FATTORIALE(n)/(FATTORIALE(h)* FATTORIALE(k)*FATTORIALE(j)).

ESERCITAZIONE GUIDATA

Una scatola contiene g gettoni gialli (numerati da 1 a g) e b gettoni blu (numerati da 1 a b). Consideriamo l'estrazione di un gruppo di e gettoni.

Costruiamo un foglio che, ricevuti i numeri, g , b ed e , determini quanti gruppi differenti possiamo estrarre. Deve poi essere calcolato il numero di gruppi in relazione al numero k dei gettoni gialli in essi contenuti. Per dimensionare il foglio poniamo come limite $g \leq 10$.

Proviamo il foglio nei casi $g = 2$, $b = 3$ ed $e = 2$; $g = 5$, $b = 3$ ed $e = 6$; $g = 10$, $b = 12$ ed $e = 10$. Per verifica, scriviamo i gruppi del primo caso.

L'analisi del problema

Chiamiamo t il numero totale dei gettoni ($t = g + b$). Per stabilire il numero delle diverse uscite possibili, calcoliamo le combinazioni semplici di t oggetti a gruppi di e .

Dobbiamo controllare che sia $g \leq 10$ ed $e \leq g + b$.

Otteniamo poi i valori accettabili di k , facendolo variare dal valore più grande fra 0 ed $e - b$ al valore più piccolo fra e e g . Per esempio, se nella scatola i gettoni gialli sono 2, quelli blu 3 e quelli estratti 2, k varia da 0 (nessun gettone estratto è giallo) a 2 (entrambi i gettoni gialli sono estratti). Se invece i gettoni gialli sono 5, quelli blu 3 e quelli estratti 6, k varia da 3 (differenza fra e e b) a 5 (perché $g < e$).

Per stabilire il numero dei gruppi distinti contenenti k gettoni, moltiplichiamo il numero delle combinazioni semplici di g oggetti a gruppi di k per il numero delle combinazioni semplici di b oggetti a gruppi di $e - k$.

La costruzione del foglio

Basandoci sull'analisi svolta costruiamo il foglio per risolvere il problema.

- Scriviamo delle didascalie e mettiamo dei bordi alle celle A5, B5, D7, per indicare dove inserire il numero dei gettoni gialli, quello dei gettoni blu e quello dei gettoni estratti (figura 1).
- Calcoliamo il totale t dei gettoni contenuti nella scatola, scrivendo la formula =A5 + B5 in D5.
- Per controllare g , digitiamo =SE(A5 > 10; "Il foglio accetta 10 come numero massimo per i gettoni di colore giallo."; "=") in A6.
- Per controllare e , scriviamo =SE(D7 > D5; "Il numero dei gettoni da estrarre supera il numero dei gettoni contenuti nella scatola."; "=") in A9.



- Determiniamo le diverse e possibili estrazioni, digitando =SE(D7 > D5; 0; COMBINAZIONE(D5; D7) in D8.
- Per avere un appoggio al controllo dei valori di k , inseriamo nella colonna A un contatore: digitiamo 0 in A12, 1 in A13 e copiamo la zona A12:A13 sino alla A22.
- Mostriamo i valori accettabili di k , scrivendo la formula =SE(O(A12 < \$D\$7 - \$B\$5; A12 > MIN(\$A\$5; \$D\$7)); "/" ; A12) in C12 e copiandola sino alla C22.
- Per scrivere l'etichetta "gialli" solo dove serve, digitiamo =SE(C12 = "/" ; "/" ; SE(C12 = 1; "giallo"; "gialli")) in D12 e la copiamo sino alla D22.
- Calcoliamo il numero delle estrazioni che contengono k gettoni gialli, scrivendo =SE(C12 = "/" ; 0; COMBINAZIONE(\$A\$5; A12)*COMBINAZIONE(\$B\$5; \$D\$7 - A12)) in E12 e copiandola sino alla E22.
- Digitiamo =SOMMA(E12:E22) in E24, in modo da verificare che la somma del numero dei gruppi che abbiamo ottenuto sia uguale al numero delle distinte estrazioni.

I dati

- Immettiamo i valori 2, 3 e 2 rispettivamente nelle celle A5, B5 e D7 e vediamo il foglio di figura 1a. Analogamente, otteniamo il foglio di figura 1b con 5, 3 e 6 e quello di figura 1c con 10, 12 e 10.

1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	2	3		5	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 2 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 10.				
9	=				
10					
11	Il contatore	I gruppi distinti		sono	
12	0	0	gialli	3	
13	1	1	giallo	6	
14	2	2	gialli	1	
15	3	/	/	0	
16	4	/	/	0	
17	5	/	/	0	
18	6	/	/	0	
19	7	/	/	0	
20	8	/	/	0	
21	9	/	/	0	
22	10	/	/	0	
23					
24	Il numero delle combinazioni				10

a. Il foglio corrispondente ai dati $g = 2, b = 3$ ed $e = 2$.

1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	5	3		8	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 6 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 28.				
9	=				
10					
11	Il contatore	I gruppi distinti		sono	
12	0	/	/	0	
13	1	/	/	0	
14	2	/	/	0	
15	3	3	gialli	10	
16	4	4	gialli	15	
17	5	5	gialli	3	
18	6	/	/	0	
19	7	/	/	0	
20	8	/	/	0	
21	9	/	/	0	
22	10	/	/	0	
23					
24	Il numero delle combinazioni				28

b. Il foglio corrispondente ai dati $g = 5, b = 3$ ed $e = 6$.

1	Il calcolo combinatorio				
2					
3	I gettoni numerati contenuti nella scatola sono				
4	gialli	blu		in totale	
5	10	12		22	
6	=				
7	Se un'estrazione è formata da 10 gettoni,				
8	le estrazioni distinte risultano 646646.				
9	=				
10					
11	Il contatore	I gruppi distinti		sono	
12	0	0	gialli	66	
13	1	1	giallo	2200	
14	2	2	gialli	22275	
15	3	3	gialli	96040	
16	4	4	gialli	194040	
17	5	5	gialli	199584	
18	6	6	gialli	103950	
19	7	7	gialli	26400	
20	8	0	gialli	2970	
21	9	9	gialli	120	
22	10	10	gialli	1	
23					
24	Il numero delle combinazioni				646646

c. Il foglio corrispondente ai dati $g = 10, b = 12$ ed $e = 10$.

▲ Figura 1

Le combinazioni del primo caso

Per verifica, scriviamo le combinazioni semplici dei 5 oggetti $\{g_1, g_2, b_1, b_2, b_3\}$ in gruppi di 2:

- con 0 gialli: $[b_1, b_2], [b_1, b_3], [b_2, b_3]$ 3
- con 1 giallo: $[g_1, b_1], [g_1, b_2], [g_1, b_3], [g_2, b_1], [g_2, b_2], [g_2, b_3]$ 6
- con 2 gialli: $[g_1, g_2]$ 1

Esercitazioni

Costruisci i fogli che, dopo aver letto i valori di n e di k , verifichino le seguenti identità.

1 $n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)!$

2 $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$

3 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$

4 $\binom{n + 1}{2} = n^2 - \binom{n}{2}$

Dopo aver analizzato ognuno dei seguenti problemi, costruisci un foglio che permetta l'ingresso dei dati, calcoli e mostri i risultati. Prova il foglio nei casi proposti. Sul quaderno scrivi i gruppi corrispondenti al caso a .

- 5** In una scuola ci sono tre classi quinte formate rispettivamente da a , b e c alunni. Occorre formare una rappresentanza formata da quattro alunni, di cui due della classe più numerosa. Determina quante sono le possibili quaterne che si possono formare. a) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$; b) $a = 28$, $b = 24$, $c = 30$; c) $a = 24$, $b = 24$, $c = 22$. [a] 12; b) 292 320; c) 145 728]
- 6** Hai n gettoni neri numerati da 1 a n , b gettoni bianchi numerati da 1 a b , r gettoni rossi numerati da 1 a r . Determina le possibili sestine che puoi formare con due gettoni neri, tre bianchi e uno rosso. a) $n = 2$, $b = 4$, $r = 2$; b) $n = 5$, $b = 3$, $r = 3$; c) $n = 6$, $b = 2$, $r = 4$. [a] 8; b) 30; c) 0]
- 7** Quanti numeri di c cifre tutte diverse puoi formare con gli elementi dell'insieme A formato da m cifre diverse e quanti di essi iniziano con la cifra r ? Quanti ne puoi formare di c cifre anche ripetute e quanti di essi iniziano con la cifra r ? a) $c = 2$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $r = 4$; b) $c = 3$, $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $r = 7$; c) $c = 4$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $r = 5$. [a] 12 e 3, 16 e 4; b) 60 e 12, 125 e 25; c) 840 e 0, 2401 e 0]
- 8** Con una parola formata da l lettere, di cui n non ripetute, u ripetute una volta, d ripetute due volte, t ripetute tre volte, determina quanti anagrammi della parola puoi formare, anche senza significato (u , d e t possono anche valere 0). a) API; b) ARPA; c) COCCO. [a] 6; b) 12; c) 10]
- 9** Calcola i coefficienti dello sviluppo di $(ax + by)^n$. Assegna poi a x e a y dei valori e calcola la potenza del binomio prima e dopo lo sviluppo. a) $a = 3$, $b = -2$, $n = 3$, $x = 2$, $y = 1$; b) $a = 1$, $b = -3$, $n = 4$, $x = 1$, $y = 1$; c) $a = 1$, $b = 1$, $n = 6$, $x = 2$, $y = 1$. [a] $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$, 64; b) $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$, 16; c) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$, 729]