

LABORATORIO DI MATEMATICA

GLI SPAZI VETTORIALI

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive calcoliamo le componenti p e q dei vettori $\vec{u} = (p; -2)$ e $\vec{v} = (1; q)$ appartenenti allo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 , in modo che l'espressione $2\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$ valga $\vec{r} = (-3; -2)$.

Determinati p e q , tracciamo i grafici dei vettori $2\vec{u}$, $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$ e \vec{r} nel piano cartesiano.

Le coordinate p e q

- Diamo *Crea_Espressione* e scriviamo nella riga di editazione la definizione del vettore \vec{u} : $u := [p, -2]$ e con INVIO la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Operiamo in modo simile per la definizione del vettore \vec{v} , scrivendo $v := [1, q]$ e immettendola nella #2.
- Scriviamo $r := [-3, -2]$, la definizione di \vec{r} , e la inseriamo nella #3.
- Digitiamo l'espressione $2u + 1/2*(u - v) = r$ e la poniamo nella #4.
- Applichiamo sulla #4 il comando *Risolvi_Espressione* e usciamo dalla corrispondente finestra di dialogo con un clic su *Risolvi*, ottenendo l'impostazione della soluzione nella #5 e la soluzione medesima nella #6.

I vettori del problema

- Scriviamo il vettore \vec{u} in relazione al valore trovato di p e nella forma matriciale $u := [0, 0; -1, -2]$, che rappresenta un segmento avente un estremo nell'origine.
- Lo inseriamo, come vediamo in figura 2, nella #7.
- Scriviamo il vettore \vec{v} in relazione al valore trovato di q e nella forma matriciale $v := [0, 0; 1, -6]$ e lo inseriamo nella #8.
- Digitiamo l'espressione parziale $2*u$ e la inseriamo nella #9 (figura 3).
- Con *Semplifica_Base* otteniamo il risultato nella #10.
- Operiamo similmente per l'espressione parziale $(u - v)/2$ e per quella globale $2*u + (u - v)/2$, ricavando i risultati nella #11 e nella #14.

Il grafico

- Evidenziamo la #10 ed entriamo in ambiente grafico a due dimensioni con il bottone *Finestra_Grafica 2D*.
- Diamo *Opzioni_Visualizzazione*, selezioniamo *Punti* e nel campo *Collega* scegliamo *Sì*, in modo che Derive, date le coordinate di due punti, tracci il segmento che li congiunge.
- Con *Traccia il grafico* otteniamo nel piano cartesiano il vettore $2\vec{u}$.

```
#1: u := [p, -2]
#2: v := [1, q]
#3: r := [-3, -2]
#4: 2·u + (u - v) / 2 = r
#5: SOLVE(2·u + (u - v) / 2 = r)
#6: p = -1 ∧ q = -6
```

▲ Figura 1

```
#7: u := [ 0  0
          -1 -2 ]
#8: v := [ 0  0
          1 -6 ]
```

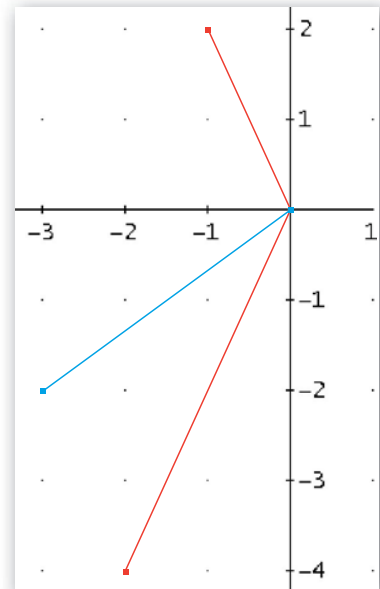
▲ Figura 2

```
#9: 2·u
#10: [ 0  0
      -2 -4 ]
#11: (u - v) / 2
#12: [ 0  0
      -1  2 ]
#13: 2·u + (u - v) / 2
#14: [ 0  0
      -3 -2 ]
```

► Figura 3



- Ritorniamo nella zona algebrica, selezioniamo la #12, ripassiamo in grafica, dove tracciamo il vettore $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.
- Operiamo similmente per il vettore risultato che si trova nella #14.
- Stabiliamo la zona del piano cartesiano da rappresentare sullo schermo dando *Imposta_Intervallo del grafico Minimo/massimo* e scegliendo $-4, 1$ e 5 come valori minimo e massimo e numero delle tacche per l'asse orizzontale e $-5, 3$ e 8 per l'asse verticale.
- Rendiamo monometrica la zona visualizzata del piano cartesiano con il comando *Imposta_Rapporto di aspetto Resetta*. Al termine vediamo il grafico di figura 4.



► Figura 4

Esercitazioni

I vettori \vec{a} e $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ formano un angolo convesso α , i loro moduli sono $a = 5$ e $b = 8$. Il vettore \vec{c} è uguale a $h\vec{a} + \vec{b}$ e forma con \vec{a} l'angolo convesso β . Con Derive determina le grandezze richieste nei seguenti esercizi attraverso i dati assegnati e poi traccia il grafico dei vettori \vec{a} , \vec{b} , $h\vec{a}$ e \vec{c} .

- 1** Dati l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ e lo scalare $h = 3$, trova il modulo c e l'angolo β . [$c = 13$ e $\beta = 0,5621$]
- 2** Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo β .
[$h_1 = 4,55$ e $\beta_1 = 0,3537$; $h_2 = -2,95$ e $\beta_2 = -0,3537$]
- 3** Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\beta = \frac{1}{9}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo α .
[$h = 2,9$ e $\alpha = 1,0256$ ∨ $h = -2,93$ e $\alpha = 2,1159$]

Dati i vettori $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni. Supponendo poi che ogni matrice rappresenti le coordinate nel piano cartesiano degli estremi di un vettore, traccia il grafico dei dati e dei risultati parziali e finali

- 4** $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ [$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$]
- 5** $\vec{u} - 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ [$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$]
- 6** $3(\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}) - \vec{u}$ [$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$]

Determina r in modo che la norma dei seguenti vettori valga $\sqrt{14}$.

- 7** $\vec{u} = (2; -1; r)$ [$r = -3$ ∨ $r = 3$]

$$8 \quad \vec{u} = (-2r; r; 3) \quad [r = -1 \vee r = 1]$$

$$9 \quad \vec{u} = (2; r; r - 4) \quad [r = 3 \vee r = -1]$$

Considera i vettori $\vec{u} = (h; -1)$, $\vec{v} = (-2; 1)$ e $\vec{w} = (-5; 5) \in \mathbb{R}^2$ e determina la componente h di \vec{u} in modo che le seguenti uguaglianze siano verificate.

$$10 \quad \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \quad [h = -2 \vee h = 2]$$

$$11 \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| - \frac{1}{5}\|\vec{w}\| = \sqrt{2} \quad [h = -4 \vee h = 0]$$

12 Determina h in modo che i vettori \vec{u} e \vec{v} risultino linearmente dipendenti.

$$\vec{u} = (1; 4; -1), \vec{v} = (3; h; -3). \quad [12]$$

Determina i coefficienti p e q che verificano che \vec{w} sia combinazione lineare di \vec{u} e \vec{v} .

$$13 \quad \vec{u} = (-1; 1), \vec{v} = (2; 4) \text{ e } \vec{w} = (8; -2). \quad [-6 \text{ e } 1]$$

$$14 \quad \vec{u} = (4; -2; 2), \vec{v} = (1; -2; 4) \text{ e } \vec{w} = (-4; 2; -2). \quad [-1 \text{ e } 0]$$

$$15 \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}. \quad [3 \text{ e } 1]$$

Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 sono noti i vettori \vec{u} e \vec{v} . Determina lo scalare k in modo che le seguenti uguaglianze siano soddisfatte.

$$16 \quad k\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 3\sqrt{5}, \quad \text{con } \vec{u} = (-3; \sqrt{11}) \text{ e } \vec{v} = (2; -1). \quad [k = 1]$$

$$17 \quad \|k\vec{u} - \vec{v}\| + k\|\vec{u} + \vec{v}\| = 16, \quad \text{con } \vec{u} = (1; 1) \text{ e } \vec{v} = (3; -1). \quad [k = 3]$$

18 Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 considera i vettori $\vec{u} = (-4; 2)$, $\vec{v} = (1; q)$ e lo scalare $k = \sqrt{5}$. Determina la componente q in modo che la seguente uguaglianza sia valida:

$$\|k\vec{u}\| + k\|\vec{u} + \vec{v}\| = 25. \quad [q = -8 \vee q = 4]$$

19 Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 è dato $\vec{a} = (1; -1)$. Determina q in modo che $\vec{b} = (-3; q)$ risulti ortogonale ad \vec{a} . Costruisci con i due vettori una base ortonormale. Verifica i risultati.

$$\left[-3, \vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \vec{b} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

20 Dato $\vec{a} = (2; -1; -2) \in \mathbb{R}^3$, determina h e k in modo che $\vec{b} = (1; -2; h)$ e $\vec{c} = (2; 2; k)$ risultino ortogonali ad \vec{a} . Costruisci con i tre vettori una base ortonormale. Verifica i risultati.

$$\left[2 \text{ e } 1, \vec{a} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right), \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right), \vec{c} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right) \right]$$

21 Dato $\vec{a} = (2; -1; 3) \in \mathbb{R}^3$, determina q in modo che $\vec{b} = (1; 4q; q)$ risulti ortogonale ad \vec{a} . Verifica l'ortogonalità dei due vettori. [2]