MAPPA DEI FONDAMENTALI

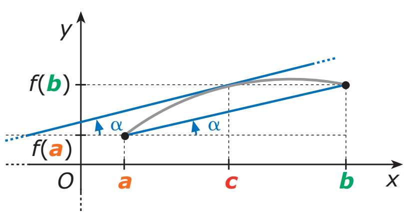
Teoremi del calcolo differenziale

Teorema di Lagrange

Ipotesi: $f(x)$ continua in $[a;\, b]$;
$f(x)$ derivabile in $]a;\, b[$.

Tesi: $\exists\, \boldsymbol{c} \in\,]a; b[$ in cui

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}} = \boldsymbol{f'(c)}.$$



$$f'(c) = m = \tan\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema di Rolle

Ipotesi: $f(x)$ continua in $[a;\, b]$;
$f(x)$ derivabile in $]a;\, b[$;
$f(a) = f(b)$.

Tesi: $\exists\, \boldsymbol{c} \in\,]a; b[$ in cui $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.

Teorema di Cauchy

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a;\, b]$;
$f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $]a;\, b[$;
$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in\,]a;\, b[$;

Tesi: $\exists\, \boldsymbol{c} \in\,]a; b[$ in cui

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{g(b)-g(a)}} = \frac{\boldsymbol{f'(c)}}{\boldsymbol{g'(c)}}.$$

Teorema di De L'Hospital

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ definite in I; I intorno di x_0 (eccetto al più x_0);
$f(x)$ e $g(x)$ derivabili in I, eccetto al più in x_0, con $g'(x) \neq 0$;

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ oppure } \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ o } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \text{ o } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \end{cases};$$

esiste $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tesi: esiste $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e risulta: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Il teorema si estende anche al caso di limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Funzioni crescenti e decrescenti

$y = f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo I e derivabile nei suoi punti interni:

- se $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ per ogni x interno a I, allora $f(x)$ è **crescente** in I;
- se $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ per ogni x interno a I, allora $f(x)$ è **decrescente** in I.

continua »

Massimi e minimi

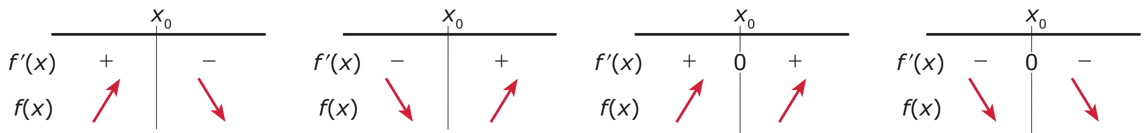
Data la funzione $y = f(x)$ con dominio D e dato il punto $x_0 \in D$, se

- $f(x_0) = M$ e $M \geq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **massimo assoluto**;
- $f(x_0) = m$ e $m \leq f(x)\ \forall x \in D$, allora x_0 è un punto di **minimo assoluto**.

Se esiste un intorno I di x_0 tale che:

- $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **massimo relativo**;
- $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in I$, x_0 è di **minimo relativo**.

Nella pratica, si studia il segno della derivata prima di $f(x)$ individuando massimi, minimi ed eventuali flessi orizzontali della funzione.



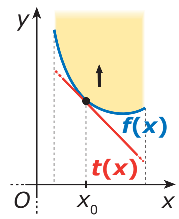
x_0 massimo **x_0 minimo** **x_0 flesso orizzontale**

Concavità

$y = f(x)$ definita e derivabile in $]a; b[$,
$y = t(x)$ retta tangente alla curva $f(x)$.

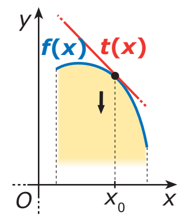
- $f(x) > t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità verso l'alto**;
- $f(x) < t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$, in x_0 la curva ha la **concavità verso il basso**.

$f(x) > t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$



concavità verso l'alto in x_0

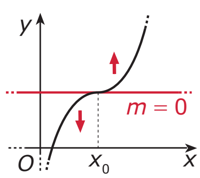
$f(x) < t(x)\ \forall x \in I \wedge x \neq x_0$



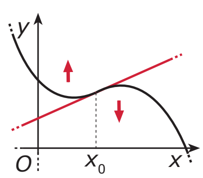
concavità verso il basso in x_0

Punti di flesso

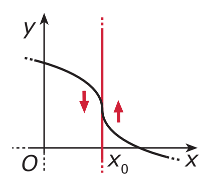
Se in x_0 il grafico di $f(x)$ cambia concavità, la curva ha un punto di flesso che può essere orizzontale, obliquo o verticale.



x_0 è punto di flesso **orizzontale**



x_0 è punto di flesso **obliquo**



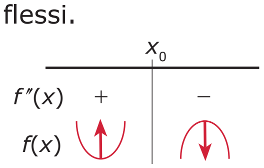
x_0 è punto di flesso **verticale**

Condizioni per la concavità e per i flessi

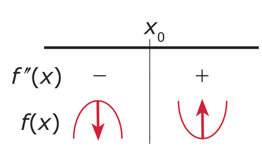
$y = f(x)$ definita e continua in I, con $x_0 \in I$;
$f'(x)$, $f''(x)$ definite e continue in I:

- se $f''(x_0) > 0$, **concavità verso l'alto**;
- se $f''(x_0) < 0$, **concavità verso il basso**;
- se $f''(x_0) = 0$, **condizione necessaria per un flesso**.

Nella pratica, si studia il segno della derivata seconda della funzione individuando concavità e flessi.



x_0 flesso



x_0 flesso

FAI IL PUNTO SUI FONDAMENTALI → p. 1109