Approfondimento

Il principio dei lavori virtuali

Il principio della conservazione dell'energia trova applicazione anche nello studio di problemi statici, sotto il nome di **principio dei lavori virtuali**. Poiché in condizioni statiche non avvengono movimenti, l'applicazione riguarda movimenti potenziali e non effettivi e questo spiega il termine «virtuali».

Il principio si esprime nel modo seguente:

▶ **in un sistema equilibrato il lavoro totale di tutte le forze applicate è nullo per qualunque insieme di possibili piccolissimi spostamenti delle parti del sistema**.

Infatti se il risultato fosse maggiore di zero, al lavoro dovrebbe corrispondere un aumento di energia cinetica nel caso di corpi rigidi e/o una deformazione nel caso di corpi elastici.

Principio dei lavori virtuali		
lavoro totale = 0	Sistema di forze equilibrate	Sistema di piccoli spostamenti possibili

Nel caso di corpi rigidi le forze sono costituite dai carichi e dalle reazioni vincolari; nel caso di corpi elastici, essendo presenti deformazioni, va considerato anche il lavoro delle tensioni interne.

Il principio lascia libertà nella scelta del sistema di forze e del sistema di spostamenti, purché siano rispettate le seguenti condizioni:

- lavoro totale nullo;
- sistema di forze equilibrate;
- sistema di spostamenti possibili, cioè compatibili tra loro tenendo conto della geometria degli elementi.

APPLICAZIONE 1

Calcolo di reazioni in un sistema isostatico

In figura è rappresentata una trave isostatica costituita da due elementi rigidi collegati da una cerniera interna.

Le forze reali (carico F e reazioni Y_1, Y_2, Y_3) costituiscono sicuramente un sistema equilibrato.

Il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura è basato sull'ipotesi di svincolare il punto 3 e lasciar ruotare rigidamente i due elementi componenti attorno ai punti 1 e 2; la reazione Y_3 compie il lavoro necessario per riportare il punto nella posizione allineata, mentre il carico F compie lavoro di segno opposto.

Indicato con s_3 il piccolo spostamento virtuale del punto 2, si ha:

$$L_{tot} = F \cdot s_5 - Y_3 \cdot s_3 = 0$$

▶

APPLICAZIONE 1

Con semplici considerazioni geometriche, che si deducono dalla rigidità degli elementi, si può mettere in relazione lo spostamento s_5 con s:

$$s_4 = \frac{s_3}{2} \cdot 2{,}5 = 1{,}25 \cdot s_3 \qquad \text{(\textit{fulcro nel punto} 2)}$$

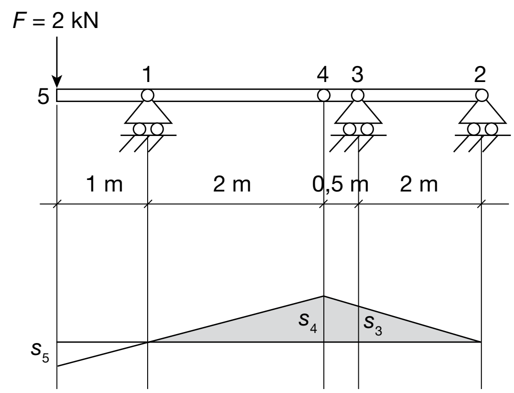
$$s_5 = \frac{s_4}{2} \cdot 1 = 0{,}5 \cdot s_4 = 0{,}5 \cdot 1{,}25 \cdot s_3 \qquad \text{(\textit{fulcro nel punto} 1)}$$

Sostituendo F con la sua intensità e s_5 con la relazione ricavata sopra, la condizione del lavoro totale nullo diventa:

$$2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}25 \cdot s_3 - Y_3 \cdot s_3 = 0$$

Si ottiene: $\boldsymbol{Y_3 = 1{,}25}$ **kN**.

Procedendo in modo analogo si ricavano le altre reazioni.



APPLICAZIONE 2

Sistema di pulegge

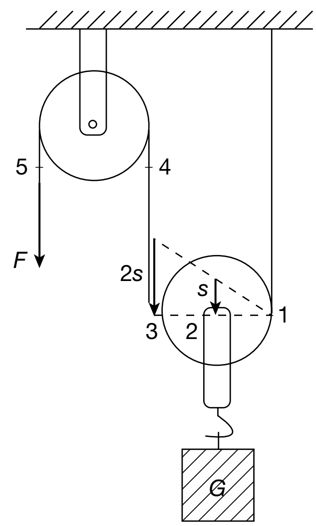
Applicando il principio dei lavori virtuali al sistema di pulegge della figura a lato, si ottiene facilmente che la forza F da applicare all'estremità libera della fune per mantenere in equilibrio il peso G è pari a 1/2 G.

Infatti se la puleggia mobile fosse libera di salire di un tratto s (spostamento del punto 2), lo spostamento del punto 3 sarebbe pari a $2 \cdot s$; infatti la puleggia compirebbe un piccolissimo rotolamento attorno al punto 1 di contatto fune-puleggia. I punti 4 e 5 compiono lo stesso spostamento del punto 2.

Il lavoro virtuale è dato da:

$$F \cdot 2s - G \cdot s = 0$$

Si ricava $\qquad \boldsymbol{F = \frac{1}{2} G}$



APPLICAZIONE 3

Sistema articolato

Il sistema articolato della figura a fianco è costituito da aste articolate collegate a formare losanghe di lato a; si vuole calcolare la forza F da applicare all'estremità per mantenere in equilibrio il sistema in presenza della forza S che cerca di chiuderlo.

Una piccola rotazione virtuale delle due aste 1-2 e 1-3 comporta lo spostamento di un tratto dx dei punti 2 e 3; per simmetria gli stessi movimenti si ripetono sulle aste 2-4 e 3-4, in modo che il punto 4 si avvicina alla cerniera fissa 1 di un tratto $2 \cdot dx$.

Analogo spostamento si verifica tra i punti allineati delle altre due losanghe 4-5 e 5-6; in definitiva lo spostamento virtuale del punto 6, se fosse libero di muoversi, sarebbe di $3 \cdot (2 \cdot dx)$.

Il lavoro totale è:

$$S \cdot (2 \cdot dx) - F \cdot 3 \cdot (2 \cdot dx) = 0$$

In definitiva risulta: $\qquad \boldsymbol{F = \frac{1}{3} S}$