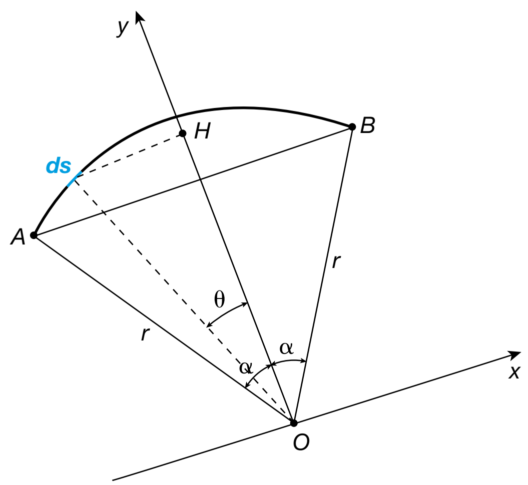
Approfondimento

Baricentro di un arco di circonferenza e di un settore circolare

A Arco di circonferenza

Su una circonferenza di raggio r è individuato un arco corrispondente a un angolo al centro pari a 2α.

Congiunti i punti estremi dell'arco A e B con il centro O e tracciati i due assi ortogonali x e y (vedi figura sottostante), y costituisce asse di simmetria per l'arco e quindi sicuramente il baricentro cade su tale asse.

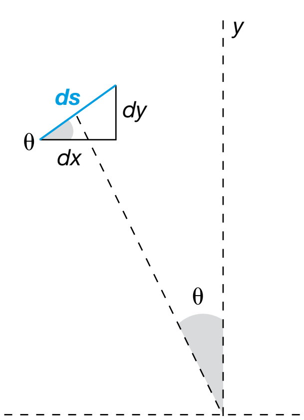


La lunghezza dell'arco è $\overset{\frown}{AB} = 2r\alpha_{rad}$, ricordando il significato di radiante:

$$\frac{\textit{lunghezza dell'arco}}{\textit{lunghezza del raggio}}$$

La lunghezza del segmento è invece $AB = 2r\,\text{sen}\alpha$.

Per il calcolo del baricentro l'arco è pensato come la sommatoria di archetti di lunghezza infinitesima ds (in colore nella figura a fianco); ciascun archetto è individuato dall'angolo θ rispetto all'asse y e le sue proiezioni sui due assi hanno lunghezza:



$$dx = ds \cdot \cos\theta \qquad dy = ds \cdot \text{sen}\theta$$

La somma delle proiezioni dx equivale alla lunghezza del segmento AB:

$$\Sigma dx = \overline{AB} = 2r\sin\alpha$$

Per calcolare la posizione del baricentro G sull'asse y si procede con le formule ricavate per le masse e applicate alle linee:

$$y_G = \frac{\Sigma(ds \cdot y)}{\Sigma ds}$$

Il termine Σds, sommatoria delle lunghezze degli archetti infinitesimi, equivale alla lunghezza dell'arco:

$$\Sigma ds = 2r\alpha_{rad}$$

Il numeratore rappresenta il momento statico degli archetti rispetto all'asse x, perpendicolare a y; la distanza $y = OH$ è pari a $r \cdot \cos\theta$. Si può quindi scrivere, essendo r una costante:

$$y_G = \frac{\Sigma(ds \cdot r \cdot \cos\theta)}{2r\alpha_{rad}} = \frac{r \cdot \Sigma(ds \cdot \cos\theta)}{2r\alpha_{rad}} = \frac{r \cdot \Sigma(dx)}{2r\alpha_{rad}}$$

Il prodotto $dx = ds \cdot \cos\theta$ rappresenta la proiezione sull'asse x di ogni archetto ds; la sommatoria equivale, come indicato sopra, alla lunghezza del segmento $AB = 2r\text{sen}\alpha$.

In definitiva si ottiene:

$$y_G = \frac{r \cdot (2r\sin\alpha)}{2r\alpha_{rad}}$$

$$y_G = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha_{rad}}$$

B Settore circolare

Il settore circolare può essere immaginato come sommatoria di tante «strisce», ciascuna delle quali ha due lati di lunghezza pari al raggio mentre il terzo è un archetto; considerando archetti ds infinitesimi, le strisce sono assimilabili a triangoli, il cui baricentro è collocato a una distanza dal centro pari a 2/3 r.

Il calcolo del baricentro del settore circolare si può quindi ricondurre al calcolo del baricentro delle aree dei triangoli raccolte nei loro baricentri e distribuite su un arco di raggio 2/3 r.

Applicando a quest'arco il risultato ottenuto sopra, si ha:

$$y_G = \frac{\frac{2}{3} r \cdot \sin\alpha}{\alpha_{rad}}$$

Nella tabella sottostante per alcuni valori di α sono riportati i rapporti senα/α e 2/3 · senα/α.

Con $\alpha = 90°$ si ricavano i valori per la semicirconferenza e il semicerchio; con $\alpha = 1$ rad il settore è riferito a un angolo di 1 radiante e quindi a un arco pari al raggio.

α°	α (rad)	senα	senα/α	2/3 · senα/α
28,65	0,5	0,48	0,959	0,639
30	0,524	0,5	0,955	0,637
45	0,785	0,71	0,900	0,600
60	1,05	0,87	0,827	0,551
90	1,57	1	0,637	0,424