Approfondimento

Tensione nella cinghia e angolo di scorrimento

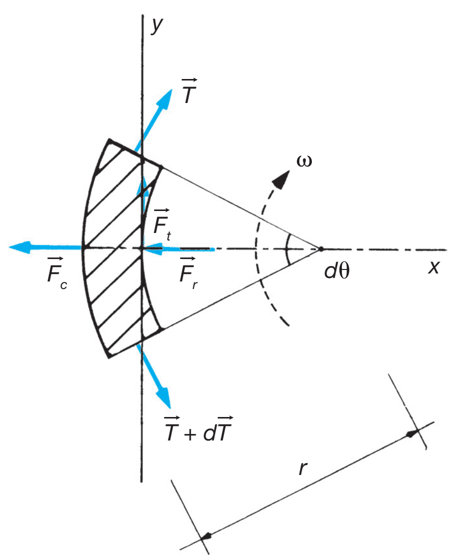
Consideriamo un piccolo tratto di cinghia, corrispondente a un angolo al centro infinitesimo (molto piccolo) $d\theta$, in tensione su una puleggia di raggio r.

Su di esso sono applicate le seguenti forze (in colore, nella figura sottostante):

- le tensioni alle estremità T e $T + dT$, di valore poco diverso, con la tensione maggiore avente il verso opposto a quello della rotazione della puleggia;
- le forze trasmesse dalla puleggia alla cinghia F_t e F_r, l'una di direzione tangente e l'altra di direzione radiale. La componente tangenziale è generata per aderenza dalla spinta radiale secondo la relazione:

$$F_t = f \cdot F_r$$

- la forza centrifuga F_c relativa al tratto di cinghia, dovuta alla sua massa e alla velocità con cui si muove.



Indicato con q il peso e con q/g la massa per unità di lunghezza della cinghia, si può esprimere la forza centrifuga come segue:

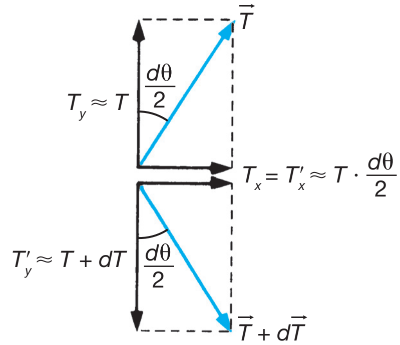
$$F_c = \frac{q}{g} \cdot ds \cdot \frac{V^2}{r}$$

La lunghezza del tratto cinghia è data da $ds = r \cdot d\theta$, esprimendo l'angolo in radianti.

Si ricava:

$$F_c = \frac{q}{g} \cdot d\theta \cdot \frac{V^2}{r}$$

Per scrivere le equazioni dell'equilibrio dinamico si fa riferimento ai due assi x, y indicati nella figura sottostante.



Con la scomposizione della tensione T sui due assi si ottiene:

$$T_x = T \cdot \sin\frac{d\theta}{2} \approx T \cdot \frac{d\theta}{2}$$

$$T_y = T \cdot \cos\frac{d\theta}{2} \approx T$$

Le approssimazioni sin $d\theta/2 = d\theta/2$ e cos $d\theta/2 \approx 1$ sono accettabili perché si è supposto l'angolo $d\theta$ molto piccolo.

Analogamente si procede per la componente $T + dT$, tenendo presente che nel prodotto $(T + dT) \cdot d\theta/2$ il termine $dT \cdot d\theta/2$ viene trascurato in quanto è il prodotto di due termini molto piccoli:

$$T'_x = (T + dT) \cdot \sin\frac{d\theta}{2} \approx T \cdot \frac{d\theta}{2}$$

$$T'_y = (T + dT) \cdot \cos\frac{d\theta}{2} \approx T + dT$$

Scrivendo le equazioni di equilibrio sui due assi si ha:

$$(x) \quad F_c + F_r - 2 \cdot T \cdot \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$(y) \quad T + dT - T - F_t = 0$$

Si possono quindi ricavare le forze esercitate dalla puleggia sulla cinghia:

$$F_r = T \cdot d\theta - F_c = d\theta \cdot \left(T - \frac{q}{g} \cdot V^2 \right)$$

$$F_t = f \cdot F_r = dT$$

Si perviene all'espressione della variazione di tensione relativa al piccolo tratto di cinghia:

$$dT = f \cdot d\theta \cdot \left(T - \frac{q}{g} \cdot V^2 \right)$$

Ricorrendo a un calcolo di integrazione, si ricava infine la relazione fra le tensioni alle due estremità dell'angolo di scorrimento β:

$$\frac{T}{t} = e^{f \cdot \beta}$$

La condizione al limite dello slittamento si verifica quando l'angolo di scorrimento è pari all'angolo di avvolgimento (α = β), per cui si ottiene:

$$\boldsymbol{\frac{T}{t} = e^{f \cdot \alpha}}$$