

Ingranaggi

Generalità

L'**ingranaggio** è un meccanismo composto da due ruote dentate, una delle quali trasmette il moto all'altra attraverso la dentatura.

Caratteristiche:

- interasse ridotto
- rapporto di trasmissione costante
- coppia trasmissibile elevata
- rapporti di trasmissione elevati con limitato ingombro

Gli ingranaggi e le ruote dentate possono essere classificati a seconda della posizione degli assi, del tipo di dentatura o della forma e posizione delle ruote.

Assi	Dentatura	Ruote	Ingranaggio	Accoppiamenti particolari
paralleli	diritta	cilindriche	interno	vite senza fine-ruota elicoidale
concorrenti	elicoidale	coniche	esterno	pignone-dentiera
sgombri	bielicoidale			ingranaggio ipoide

Ruote cilindriche a denti dritti

Passo: distanza tra l'asse di due denti consecutivi.

Cerchi primitivi: cerchi che si otterrebbero sezionando, con un piano perpendicolare agli assi, due ruote di frizione con rapporto di trasmissione pari a quello dell'ingranaggio.

Diametri primitivi: diametri dei cerchi primitivi.

Diametri primitivi e numero di denti sono tra loro proporzionali:

$$p = \frac{\pi \cdot d}{Z_1} = \frac{\pi \cdot D}{Z_2} \quad \frac{d}{D} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

1 = ruota motrice

Rapporto di ingranamento: coincide con il rapporto di trasmissione nel caso di ingranaggio riduttore ($i > 1$).

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Modulo: dimensione caratteristica della dentatura, che costituisce il riferimento per il proporzionamento.

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{D}{z}$$

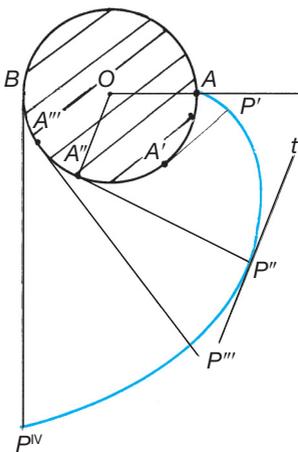
Passo	Diametro primitivo	Spessore e vano	Larghezza	Gioco	Addendum	Dedendum	Altezza	Interasse	Diametro esterno
$\pi \cdot m$	$m \cdot Z$	$\pi \cdot m/2$	$\lambda \cdot m$	$1/4 \cdot m$	m	$1,25 m$	$2,25 m$	$m \cdot Z_1 \pm Z_2/2$	$m \cdot (z_1 \pm 2)$

Profili coniugati

Condizioni per un corretto ingranamento tra i denti delle due ruote:

- uguaglianza del passo e del modulo;
- profili coniugati, per evitare urti e distacchi.

Le dentature sono normalmente costruite con profilo a **evolvente di cerchio**.



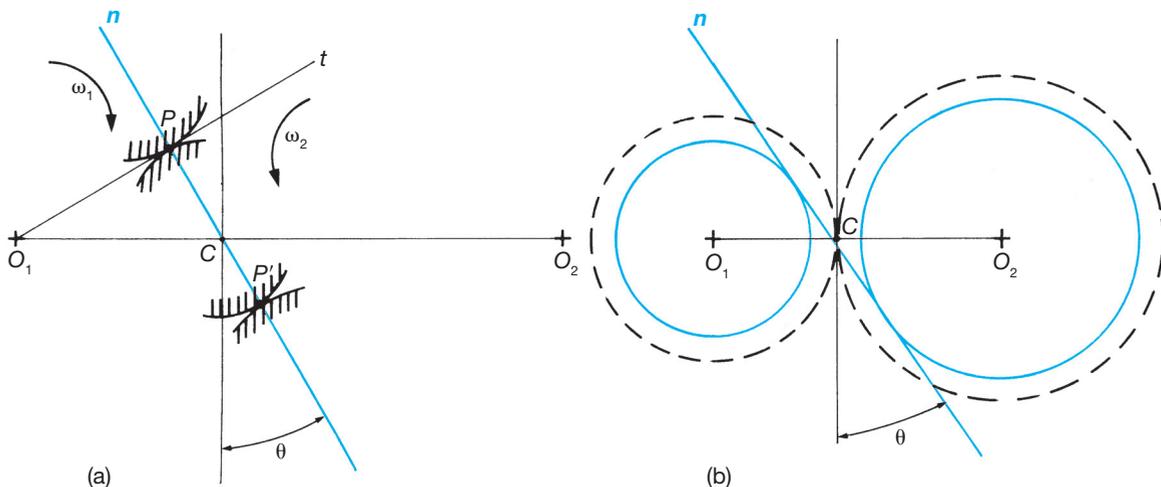
Evolvente di cerchio

Curva descritta da un punto di una retta che rotola senza strisciamento su una circonferenza.

Il luogo dei punti di contatto tra i due profili è detto **retta d'azione** o **retta di pressione**.

È in ogni istante perpendicolare ai due profili e interseca la congiungente dei centri O_1 e O_2 delle ruote in un punto C , che resta fisso al variare del punto di contatto.

La costanza del punto C garantisce che la trasmissione avvenga con rapporto di trasmissione costante.



Nel punto C sono tangenti i cerchi primitivi delle ruote dentate e il moto relativo delle dentature è di puro rotolamento.

La retta d'azione forma con la tangente ai cerchi primitivi l'**angolo di pressione** θ , il cui valore normale è:

$$\theta = 20^\circ$$

I **cerchi base** sono interni e concentrici rispetto ai cerchi primitivi e sono tangenti alla retta d'azione; insieme alla retta d'azione, essi generano il profilo a evolvente. Il raggio del cerchio base è:

$$R_b = \frac{D}{2} \cdot \cos\theta$$

Il profilo a evolvente consente piccole variazioni dell'interasse senza che risulti modificato il rapporto di trasmissione.

Arco di azione: lunghezza di circonferenza primitiva corrispondente alla durata dell'ingranamento di un dente.

Per la continuità dell'ingranamento è necessario che l'arco d'azione sia maggiore del passo.

Si ha **interferenza** quando la testa del dente della ruota ingrana con la base del profilo del pignone nel tratto di raccordo che non è a evolvente; in tal caso tende a verificarsi una compenetrazione dei denti con funzionamento irregolare e rapida usura.

La condizione per evitare l'interferenza è che il pignone (la ruota più piccola) abbia un numero di denti minimo Z_{min} che dipende dal rapporto di ingranamento.

Il caso limite è quello dell'accoppiamento **pignone-dentiera** (o rocchetto-cremagliera); quest'ultima può essere pensata come una ruota di raggio infinito e quindi con sviluppo lineare.

In tal caso si ha:

$$Z_{min} = \frac{2}{\sin^2\theta}$$

Con l'usuale angolo di pressione $\theta = 20^\circ$ risulta: $Z_{min} = 18$.

All'opposto con due ruote di ugual diametro ($u = 1$) si scende fino a $Z_{min} = 13$.

Forze scambiate e rendimento

Durante l'ingranamento la **forza F scambiata tra i denti** con profili a evolvente ha la direzione costante della retta d'azione; essa può essere scomposta nelle due componenti:

componente tangenziale, che trasmette il momento

$$F_t = F \cdot \cos\theta$$

componente radiale, che tende ad allontanare una ruota dall'altra

$$F_r = F \cdot \sin\theta = F_t \cdot \operatorname{tg}\theta$$

Man mano che il punto di contatto tra i due denti, posto sulla retta d'azione, si allontana dal punto C , cresce la componente di attrito tra le due superfici, generata per effetto dello slittamento.

Il **rendimento della trasmissione** dipende dall'angolo di pressione θ , dal numero di denti Z_1 e Z_2 e dal coefficiente di attrito f ; quest'ultimo è legato alle condizioni di lubrificazione dell'ingranaggio.

Il valore medio durante l'ingranamento è dato da:

$$\eta = \frac{1}{1 + f \pi \cdot \left(\frac{1}{Z_1} \pm \frac{1}{Z_2} \right)}$$

Aumentando il numero di denti migliora, a parità degli altri fattori, il rendimento dell'ingranaggio.

Dentatura elicoidale

Passando dalla dentatura a denti diritti alla **dentatura elicoidale** si riduce il brusco passaggio di carico fra i denti all'inizio e al termine dell'ingranamento, perché l'imbocco diventa graduale.

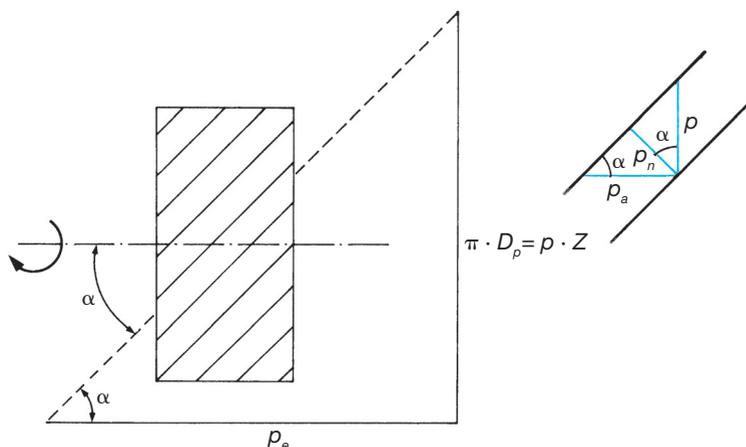
Ogni dente costituisce un tratto di elica.

Inclinazione dell'elica: angolo α fra l'elica e la direzione dell'asse della ruota; è uguale sulle due ruote, ma una è destrorsa e l'altra è sinistrorsa.

Passo dell'elica $p_e = \frac{\pi \cdot D}{\operatorname{tg} \alpha}$ **Passo frontale** (o reale) $p = \frac{\pi \cdot D}{Z}$

Passo normale
(o apparente) $p_n = \frac{\pi \cdot D}{Z} \cdot \cos \alpha$ **Passo assiale** $p_a = \frac{\pi \cdot D}{Z} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Dal punto di vista dell'ingranamento la coppia di ruote elicoidali è equivalente alla coppia di ruote a denti diritti ottenuta sezionando la ruota elicoidale con un piano perpendicolare all'elica.



	Ruote elicoidali	Ruote a denti diritti ideali
Modulo normale	m_n	$m_i = m_n$
Diametri primitivi	D_1, D_2	$D_{1i} = \frac{D_1}{\cos^2 \alpha}$ $D_{2i} = \frac{D_2}{\cos^2 \alpha}$
Numero di denti	Z_1, Z_2	$Z_{1i} = \frac{Z_1}{\cos^3 \alpha}$ $Z_{2i} = \frac{Z_2}{\cos^3 \alpha}$
Numero minimo di denti	Z_{min}	$\frac{Z_{min}}{\cos^3 \alpha}$

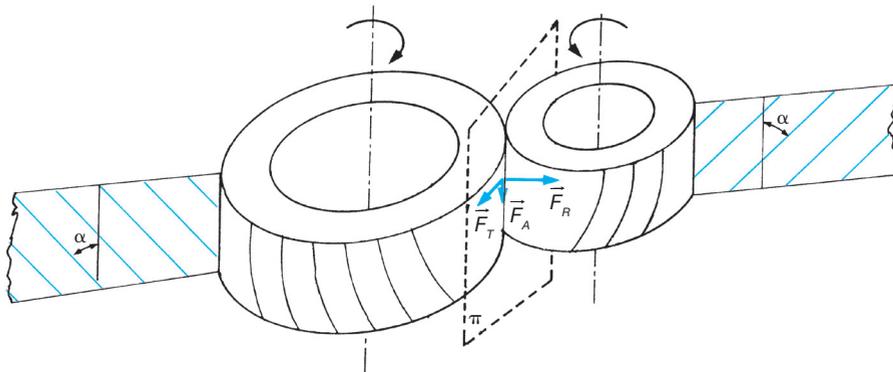
Il numero di denti minimo diminuisce al crescere dell'inclinazione dell'elica (valori normali: 7°-20°).

La forza scambiata tra i denti può essere scomposta in tre componenti: oltre alle componenti tangenziale e radiale, compare una spinta assiale, che tende a far scorrere le ruote lungo l'asse:

$$F_A = F_t \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

La spinta assiale aumenta notevolmente con l'inclinazione dell'elica.

Nel caso di notevoli potenze da trasmettere si ricorre a ruote bielcoidali con $\alpha = 20^\circ \div 45^\circ$; le due parti della dentatura sono sottoposte a spinte autoequilibranti perché le eliche sono ad andamento contrapposto.



Ruote coniche a denti diritti

Un **ingranaggio a ruote coniche** realizza una trasmissione del moto fra **assi concorrenti**; il punto di intersezione degli assi coincide con il vertice dei due coni primitivi.

I **coni primitivi** sono quelli che, avendo gli stessi assi delle ruote dentate, realizzerebbero per frizione una trasmissione con lo stesso rapporto i dell'ingranaggio.

Il **rapporto di trasmissione** è:

$$i = \frac{\operatorname{sen}\Phi_2}{\operatorname{sen}\Phi_1}$$

Φ_1 = angolo di semiapertura del cono sull'albero motore.

Φ_2 = angolo di semiapertura del cono sull'albero condotto.

Nel caso di assi tra loro perpendicolari:

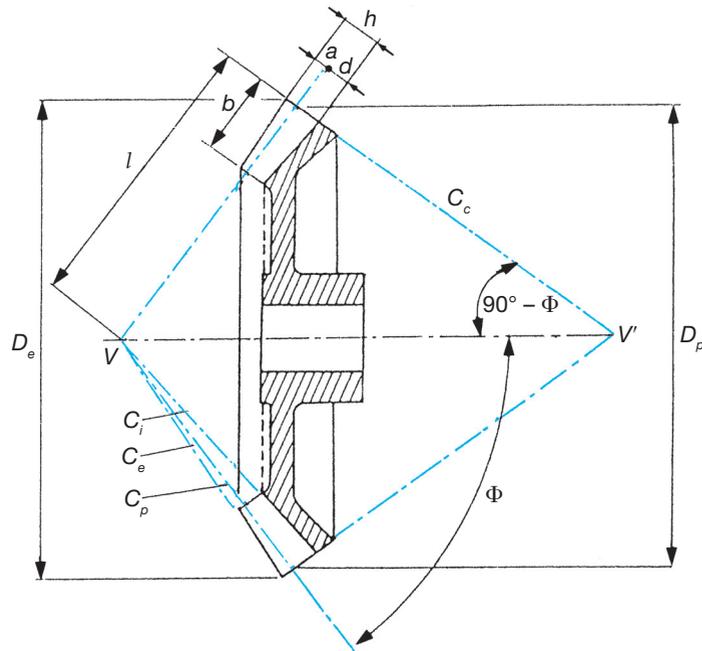
$$i = \frac{1}{\operatorname{tg}\Phi_1}$$

Fissato l'angolo $\Sigma = \Phi_1 + \Phi_2$ tra gli assi e il rapporto di trasmissione i , la relazione seguente consente di ricavare l'angolo Φ_1 e quindi Φ_2 :

$$\operatorname{tg}\Phi_1 = \frac{\operatorname{sen}\Sigma}{\cos\Sigma + i}$$

Oltre ai coni primitivi sono definiti i **coni complementari**, che hanno generatrici perpendicolari e angoli di semiapertura complementari ($90^\circ - \Phi$) rispetto ai coni primitivi.

La dentatura della ruota conica è compresa tra i **coni di troncatura esterna** e di **troncatura interna**.



In corrispondenza dei coni complementari le dimensioni modulari sono definite normalmente nel modo seguente:

addendum $a = m$
 dedendum $d = 1,2 m$
 altezza $h = 2,2 m$

Sulla circonferenza che risulta dall'intersezione tra coni primitivi e coni complementari è definito il diametro primitivo:

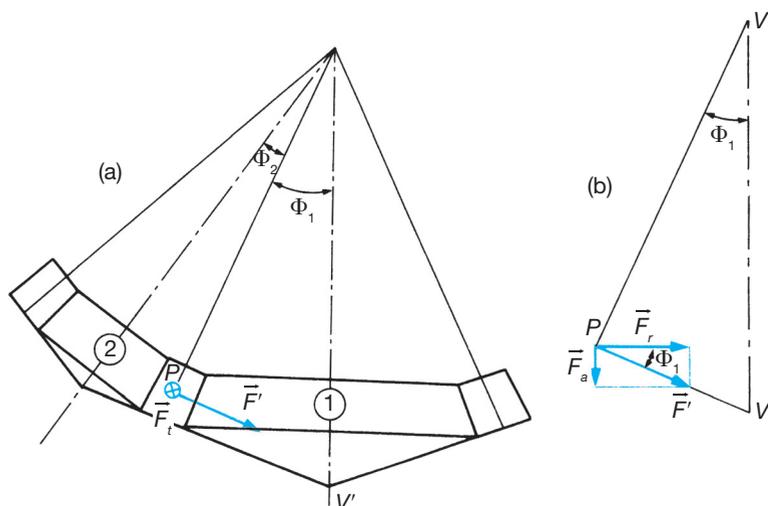
$$D_p = m \cdot z$$

Sviluppando sul piano i coni complementari di un ingranaggio conico si ottengono due settori circolari e un ideale ingranaggio con dentatura a denti dritti avente lo stesso modulo e le seguenti caratteristiche:

	Ruote coniche	Ingranaggio ideale a denti dritti
Modulo	m	m
Diametri primitivi	D_1, D_2	$D_{1id} = \frac{D_{p1}}{\cos\Phi_1}$ $D_{2id} = \frac{D_{p2}}{\cos\Phi_2}$
Numero di denti	Z_1, Z_2	$Z_{1id} = \frac{Z_1}{\cos\Phi_1}$ $Z_{2id} = \frac{Z_2}{\cos\Phi_2}$
Numero minimo di denti	Z_{min}	$\frac{Z_{min}}{\cos\Phi}$
Rapporto di trasmissione	$i = \frac{Z_2}{Z_1}$	$i \cdot \frac{\cos\Phi_1}{\cos\Phi_2} = \frac{Z_{2id}}{Z_{1id}}$

Nelle ruote coniche il profilo dei denti è a evolvente sferica, generato dal rotolamento di una retta su un cono di base.

Il **piano d'azione**, su cui giace la forza scambiata tra i denti, è tangente contemporaneamente ai due coni di base e perpendicolare all'evolvente; esso forma l'**angolo di pressione** θ con il piano tangente ai due coni primitivi.



La forza F scambiata tra due denti di ruote coniche può essere scomposta in tre componenti:

- **tangenziale** $F_t = F \cos \theta$
componente che trasmette il momento: $M = F_t \cdot D_p / 2$
- **radiale** $F_r = F \sin \theta \cos \Phi_1$
- **assiale** $F_a = F \sin \theta \sin \Phi_1$
tende a provocare uno slittamento della ruota lungo l'asse.

La risultante tra F_a e F_r è:

$$F' = F \sin \theta$$

tangente al piano complementare e con un effetto repulsivo tra le due ruote.

ruota piano-conica (o frontale) il cono primitivo ha semiapertura di 90° e degenera in un piano

ruota Bilgram assi dei denti rettilinei e tangenti a una circonferenza

ruota Klingenberg assi dei denti a evolvente

ruota Gleason assi dei denti a spirale logaritmica

Trasmissione tra assi sghembi con dentature elicoidali

La trasmissione tra assi sghembi si può effettuare con:

- ruote cilindriche a denti elicoidali;
- particolari ingranaggi conici;
- accoppiamento senza fine-ruota elicoidale.

a) ruote cilindriche a denti elicoidali

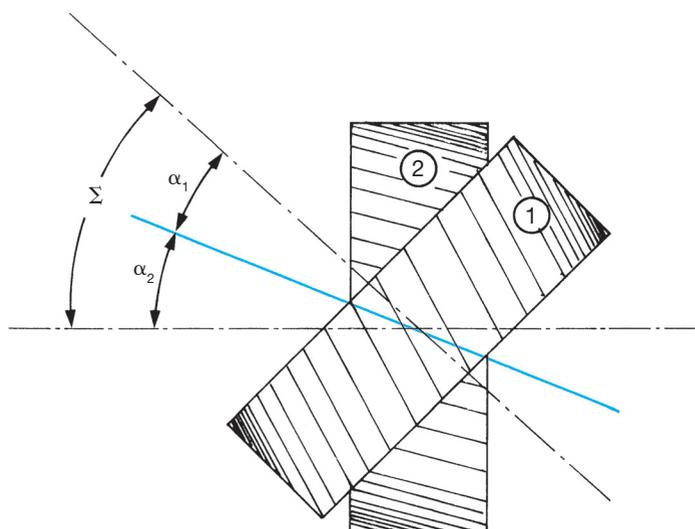
Nell'ingranamento tra due ruote a denti elicoidali con assi sghembi il contatto non avviene su una linea ma in un punto, in cui esiste sempre uno strisciamento.

Per questo motivo tali ingranaggi hanno elevata usura e basso rendimento; sono utilizzati per sforzi limitati e funzionamento discontinuo (per esempio cinematismi di comando dei servomeccanismi).

Due condizioni per la trasmissione:

gli assi di due denti in presa devono essere paralleli

le due dentature devono avere lo stesso modulo normale



Proiettate le ruote sul piano di tangenza comune, tra l'inclinazione delle due eliche α_1 , α_2 e l'angolo Σ tra le proiezioni degli assi vale la relazione: $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2$.

La distanza minima tra i due assi sghembi è: $a = 1/2 (D_1 + D_2)$.

Nel caso di assi ortogonali il passo frontale di una ruota è uguale al passo assiale dell'altra.

Il rapporto di trasmissione è dato da:

$$i = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

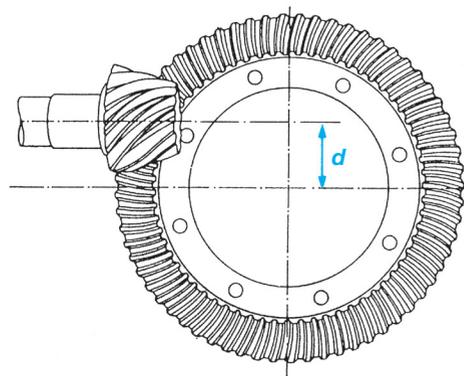
Alcuni casi particolari:

- ruote di ugual diametro $i = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$
- assi sghembi ortogonali $i = \frac{D_2}{D_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$
- eliche con la stessa inclinazione $i = \frac{D_2}{D_1}$

b) ruote coniche ad assi sghembi

Le più comuni sono le **ruote ipoidali**, a denti curvi, impiegate per assi ortogonali, con un disassamento fra asse del pignone e asse della ruota.

Tipico è l'impiego nella trasmissione degli autoveicoli.



c) accoppiamento senza fine-ruota elicoidale

Equivale a una coppia di ruote elicoidali; una delle quali ha un solo o pochi denti che si avvolgono a elica per diverse spire, con una forte inclinazione dell'elica.

L'angolo d'elica α della ruota coincide con l'angolo del filetto della vite rispetto a un piano perpendicolare all'asse della vite.

È utilizzato con assi ortogonali e per realizzare elevati rapporti di trasmissione, con la vite in funzione di motrice; potenza trasmessa e rendimento sono minori rispetto ai normali ingranaggi ($\eta \approx 75\%$).

Rapporto di trasmissione:

$$i = \frac{D_r}{D_v \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{z_r}{z_v}$$

Rendimento in funzione dell'angolo di attrito φ (si adotta quello della coppia vite-madrevite a filetto rettangolare):

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

Forze scambiate tra vite e ruota per trasmettere il momento motore M_v , applicato alla vite:

$$T_v = A_r = \frac{2 \cdot M_v}{D_v}$$

$$T_r = A_v = \frac{T_v}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

$$R = \frac{T_v}{\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)} \cdot \operatorname{tg}\theta$$

L'aumento dell'inclinazione α migliora il rendimento, ma, a parità di passo, riduce il diametro della vite diminuendone la resistenza.