

## T3

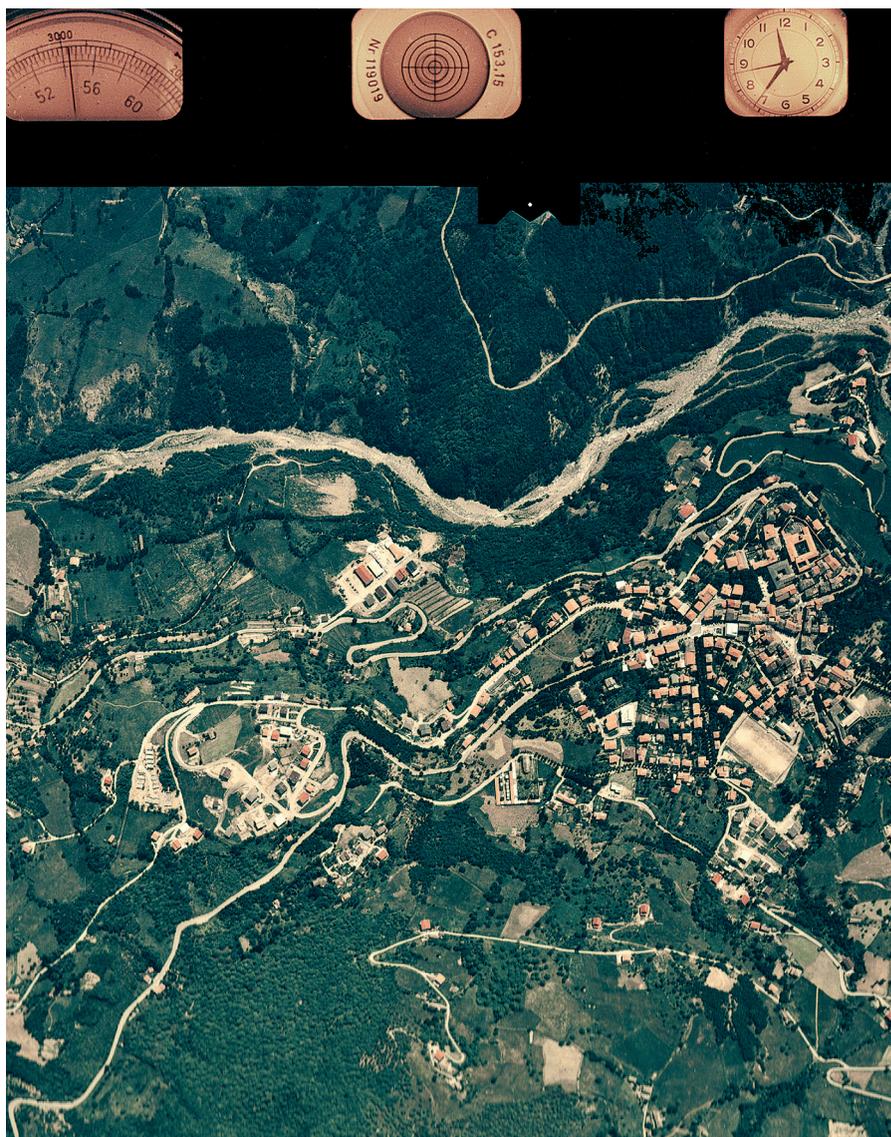
# Orientamento e restituzione

## TEORIA

- 1 Orientamento dei fotogrammi
- 2 Orientamento interno
- 3 Orientamento esterno
- 4 Orientamento relativo
- 5 Orientamento assoluto
- 6 Triangolazione aerea
- 7 Equazioni di collinearità
- 8 Restituzione
- 9 Restituzione monoscopica (raddrizzamento)

## RIASSUMENDO

## AUTOVALUTAZIONE



Le operazioni di orientamento dei fotogrammi sono una fase fondamentale del processo fotogrammetrico, e nell'ambito della relativa attuazione viene richiesta all'operatore la digitazione delle marche fiduciali incise sui lati della lastra all'atto della presa. Sopra è illustrato il particolare di un fotogramma aereo in cui sono visibili le immagini degli strumenti di controllo raccolte nel *data strip*, e, nella parte centrale, una delle quattro marche fiduciali dello stesso fotogramma.

# 1. Orientamento dei fotogrammi

Nel paragrafo 2 della precedente unità T1 sono state enunciate le tre fasi temporali in cui si sviluppa il rilievo fotogrammetrico:

- **presa** (acquisizione);
- **orientamento**;
- **restituzione**.

Dopo aver ripreso tutti i fotogrammi necessari al rilievo (la **presa**, esaminata in precedenza), per poter ottenere il prodotto finale del rilievo (carta, disegno ecc.) con la **restituzione**, è necessario che la stella di *raggi proiettanti* di ogni fotogramma sia collocata nello spazio nella **stessa posizione** che aveva all'atto della presa. Questa condizione viene imposta con un **insieme di operazioni**, preliminari alla restituzione ed eseguite da personale tecnico con strumenti detti *restitutori*; queste operazioni costituiscono la fase di **orientamento**. Questa, a sua volta, può comprendere le fasi sintetizzate nello schema a blocchi di ► FIGURA 1 e che saranno descritte in questa unità.

# 2. Orientamento interno

La geometria della presa, come detto in precedenza, è quella della **proiezione centrale**; pertanto, dopo avere sviluppato il **positivo** della *lastra*, è necessario conoscere i **parametri** che, sullo stesso *positivo*, possano permettere la **ricostruzione** dei *raggi proiettanti* nella geometria della proiezione centrale. Essendo peculiari della camera, essi sono identici per tutti i fotogrammi del rilievo.

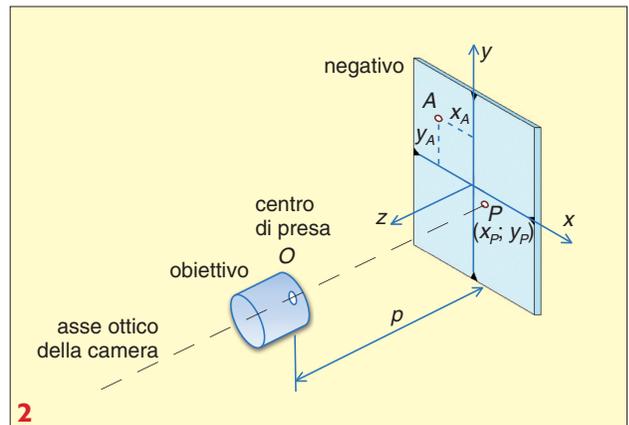
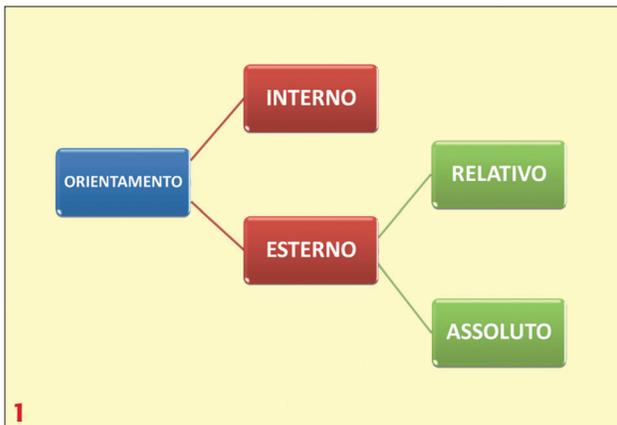
Questi *parametri*, di fatto, sono quelli che consentono di definire la posizione del **centro di presa**  $O$  rispetto al piano della *lastra*. Questa operazione costituisce l'**orientamento interno** del fotogramma.

**FIGURA 1** Schema a blocchi di sintesi delle operazioni di orientamento dei fotogrammi.

**FIGURA 2** Per eseguire l'orientamento interno è necessario conoscere la distanza principale  $p$  e la posizione sulla lastra del punto principale  $P$ :  $x_p$  e  $y_p$ . Il costruttore tenta di collocare  $P$  (proiezione di  $O$  sul piano della lastra) nell'origine del sistema di riferimento lastra  $xy$ , ma in realtà esso è leggermente spostato di una quantità (alcuni centesimi di mm), che deve poi essere misurata con precisione. Naturalmente, nella figura, tale spostamento è stato enfatizzato.

Per definire la posizione di  $O$ , è necessario che sul *piano della lastra* sia definito un sistema di assi cartesiani  $xy$  che, come si è visto, è materializzato dalle quattro (o otto) **marc**e **fiduciali** incise sui bordi del fotogramma all'atto della presa, e un asse  $z$  normale al *piano della lastra*. Tale sistema viene definito **sistema interno o sistema lastra** (► FIGURA 2) e a esso verranno poi riferite anche le misure delle *coordinate lastra* delle immagini dei punti dell'oggetto (per esempio, punto  $A$ :  $x_A$ ,  $y_A$ ) per ottenerne la loro posizione assoluta.

Teoricamente l'obiettivo della camera dovrebbe essere realizzato in modo che la **perpendicolare** condotta dal *centro di presa*  $O$  al piano della lastra (detta **punto principale** e indicata con  $P$  nella ► FIGURA 2) cada esattamente nell'**origine** del sistema  $xy$  (intersezione delle congiungenti le *marc*e *fiduciali*).



Questo non si verifica in modo perfetto e la **proiezione**  $P$  del *centro di presa*  $O$  sul piano della lastra può scostarsi di alcuni **centesimi** di millimetro dall'*origine* degli assi  $xy$ . Le sue **coordinate**  $x_p$  e  $y_p$ , tuttavia, **devono** essere misurate **esattamente** e fornite dalla casa costruttrice unitamente alla **distanza principale**  $p$ .

Questi tre parametri, dunque, sarebbero già sufficienti per effettuare l'*orientamento interno* se l'obiettivo fosse un sistema ottico **privo di aberrazioni**. In realtà tutti i *sistemi ottici* sono affetti da *aberrazioni* che provocano **deformazioni** dell'immagine, le cui entità devono essere note per poi poter essere corrette.

Nel nostro caso è particolarmente temibile la **distorsione**, a causa della quale le **posizioni reali** dei punti sulle immagini (per esempio,  $x_A, y_A$ ) si *discostano* da quelle previste in base allo schema ottico teorico. Tali *deformazioni* sono piccolissime, ma **non trascurabili** nel contesto della *fotogrammetria*.

Le entità di queste **deformazioni**, per fortuna, rimangono stabili per una data configurazione dell'*obiettivo*, e possono essere modellizzate con appositi **diagrammi** forniti dalla casa costruttrice della camera, affinché possano essere **corrette**. La correzione delle *distorsioni* fa parte delle operazioni di **orientamento interno** dei fotogrammi, che in definitiva richiede la conoscenza dei seguenti parametri:

- posizione del **punto principale**  $P$  nel sistema lastra:  $x_p$  e  $y_p$ ;
- **distanza principale**  $p$ ;
- curva di **distorsione** dell'obiettivo.

Tutti questi parametri sono contenuti nel **certificato di calibrazione** della camera, con precisioni almeno al *centesimo* di mm ( $\pm 0,01$  mm). Materialmente l'*orientamento interno* è una operazione che consiste nella collimazione delle *marche fiduciali* dei fotogrammi montati su appositi strumenti (**restitutori**), e nell'immissione, nel software, dei parametri precedenti, nell'ambito delle operazioni preliminari alla **restituzione** del rilievo fotogrammetrico.

## ■ Gli effetti della distorsione

### ● Comportamento dell'obiettivo teorico

Si è visto in precedenza che l'*obiettivo* della camera è costituito da un *sistema ottico* realizzato montando su un unico *asse ottico* diverse tipologie di **lenti**, alle quali corrisponde una lente *risultante*.

In essa si immagina che tutta la *rifrazione* sia concentrata in corrispondenza di due distinti piani, ortogonali all'asse ottico, detti **piani principali**; l'intersezione di questi piani con l'asse ottico determina i **punti principali**, che possiamo immaginare coincidenti con i **punti nodali**  $N_1$  e  $N_2$ , i quali presentano la seguente importante proprietà **teorica**:

un raggio luminoso incidente passante per  $N_1$  (*primo punto nodale*) viene rifratto uscendo da  $N_2$  (*secondo punto nodale*) **parallelamente** al raggio incidente; dunque i due raggi luminosi formano lo stesso angolo  $\alpha$  rispetto all'asse ottico.

Il punto  $N_1$  costituisce il centro di proiezione nello *spazio oggetto* e  $N_2$  quello nello *spazio immagine*, dunque coincidente con il **centro di presa**  $O$  definito in precedenza. Tuttavia, considerando la distanza tra i due punti nodali *trascurabile* rispetto alla distanza a cui si trova l'oggetto, possiamo accettare l'approssimazione  $N_1 \equiv N_2 \equiv O$ .

### ● Comportamento dell'obiettivo reale

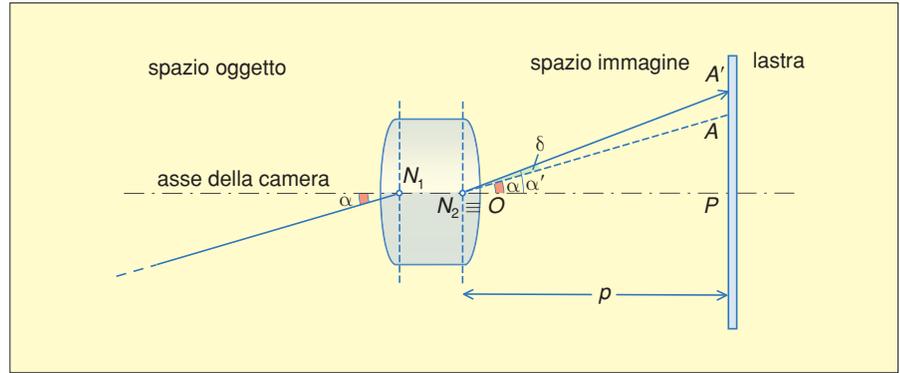
Il comportamento dell'**obiettivo reale** differisce da quello di un sistema ottico teorico prima descritto sinteticamente, e ciò produce diversi tipi di **deformazioni**

## FAQ

► **Dove sono reperibili i parametri che devono essere utilizzati nella fase di orientamento interno?**

Nel certificato di calibrazione della camera che viene allegato a essa all'acquisto, o che viene fornito dal laboratorio che ha eseguito successivamente una taratura periodica di controllo.

**FIGURA 3** La distorsione è un'aberrazione dell'obiettivo molto temibile in fotogrammetria. Essa consiste in una deformazione dell'immagine causata dal mancato parallelismo del raggio emergente rispetto a quello incidente.



**FAQ**

**► Quale effetto produce la distorsione sui fotogrammi?**

Lo spostamento non omogeneo dei punti dell'immagine dell'oggetto, che, pertanto, risulta deformata. Tale errore, se non corretto, produrrebbe imprecisioni nella misura delle coordinate lastra necessarie alla restituzione.

nell'immagine dovute a varie cause. Tra queste, nel nostro contesto, come già anticipato, è particolarmente temibile la **distorsione**.

Essa è causata dal **mancato rispetto** della condizione prima citata; in effetti il raggio rifratto emergente da  $N_2$  non è *esattamente* parallelo a quello incidente, ma forma un angolo  $\alpha'$  rispetto all'asse ottico leggermente diverso da  $\alpha$  (nella ► FIGURA 3 è  $\alpha' > \alpha$  ma potrebbe anche verificarsi il contrario).

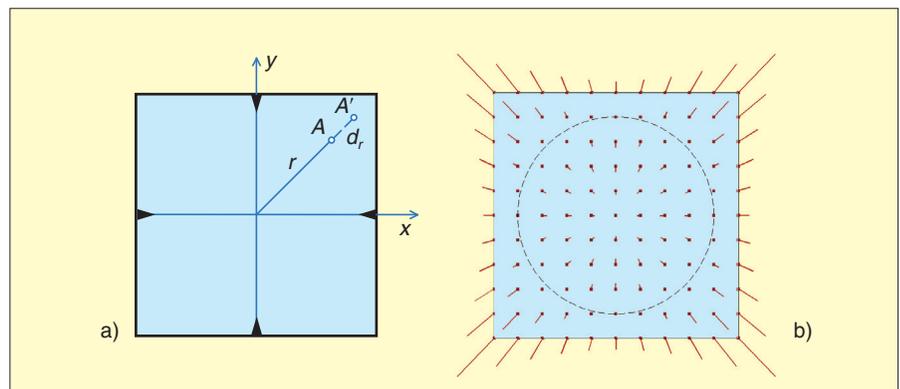
Nella posizione teorica un raggio luminoso incidente passante per  $N_1$  dovrebbe emergere *parallelamente* a se stesso passando per  $N_2$ , per essere poi raccolto dalla lastra nel punto  $A$  (► FIGURA 3).

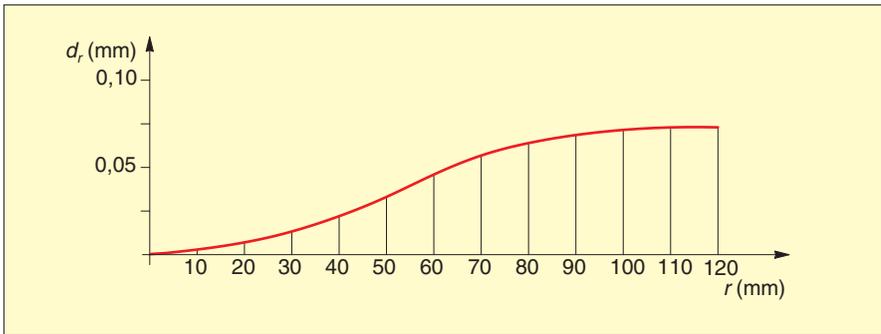
Per effetto del **mancato esatto parallelismo**, il raggio rifratto emerge **inclinato** di  $\delta = \alpha' - \alpha$  rispetto alla direzione teorica e viene raccolto sulla pellicola nel punto  $A'$ . La distanza  $AA' = d$  fornisce la misura della *deformazione* dell'immagine che viene detta **distorsione**.

Il valore della *deformazione*  $d$  non è costante, ma varia con l'angolo di inclinazione  $\alpha$  rispetto all'asse ottico, quindi con la **distanza**  $r$  di un punto  $A$  sull'immagine dal centro del fotogramma (► FIGURA 4a). La *deformazione*  $d$  può essere scomposta in due componenti: una lungo la congiungente con il centro della lastra, detta **radiale**  $d_r$ , e una normale a questa direzione, detta **tangenziale**  $d_t$ . La parte **prevalente** di  $d$  è la componente in direzione **radiale**  $d_r$  (mediamente il 95% di  $d$ ), che pertanto è l'unica a venire considerata.

L'andamento della *distorsione radiale* è rappresentata con un **diagramma** (detto **curva di distorsione**) che viene determinato in fase di **calibrazione** della camera. Esso si ottiene riportando in ascisse le distanze dal centro dell'immagine, e in ordinate i valori della *distorsione radiale* (► FIGURA 5). Di fatto la *curva di distorsione* rappresenta la media delle curve di distorsione ottenute misurando le deformazioni in corrispondenza delle 4 *semidiagonali* dell'immagine.

**FIGURA 4** (a) La parte prevalente della distorsione di un obiettivo è la componente radiale, che deforma l'immagine spostando un suo punto  $A$  nella posizione  $A'$  lungo la direzione radiale. (b) Andamento della distorsione radiale sull'immagine il cui valore è rappresentato da segmenti di lunghezza a esso proporzionale.





**FIGURA 5** La legge con cui varia la distorsione radiale di un obiettivo è rappresentabile con un diagramma detto *curva di distorsione*, in cui in ascisse sono riportate le distanze dei punti immagine dal centro della lastra, e in ordinate i valori della distorsione radiale.

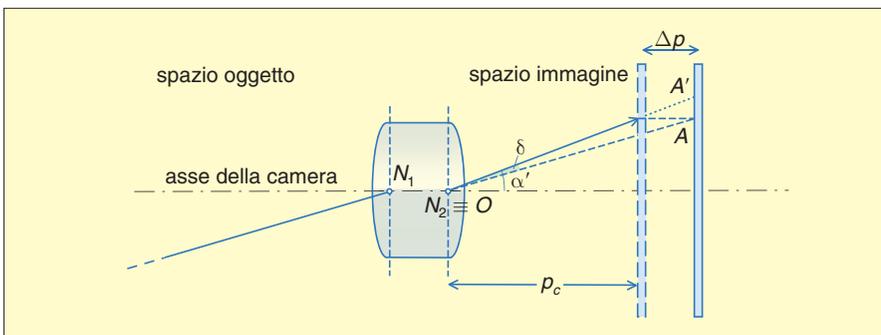
### • Minimizzazione della distorsione

Le case costruttrici utilizzano una tecnica consolidata per **ridurre** gli effetti della distorsione. In effetti, immaginando di **traslare** la lastra di una quantità  $\Delta p$  (si tratta di **pochi millesimi** di mm) lungo l'asse ottico, è possibile **annullare** la distorsione in un **dato punto A** (► FIGURA 6) e in tutti quelli che si trovano alla *stessa distanza dal centro*, dunque appartenenti a un *cerchio ideale* (► FIGURA 4b). Naturalmente negli altri punti dell'immagine la *distorsione* non è nulla, ma è comunque **minore** di quella che si riscontra senza lo spostamento della lastra.

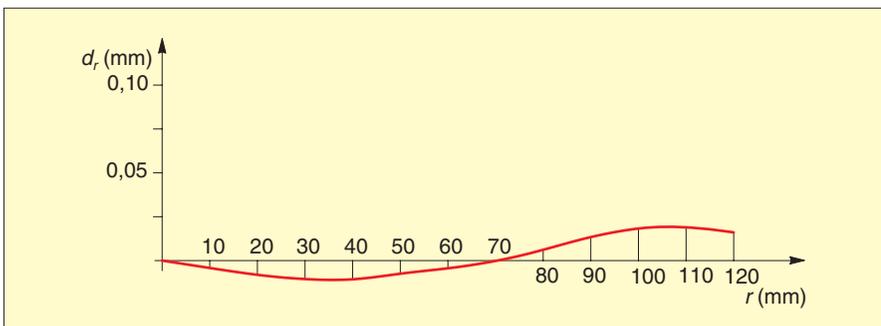
Ovviamente allo spostamento della lastra corrisponde una opportuna variazione della **distanza principale**  $p$ ; nelle camere moderne, tuttavia, il valore di questo spostamento è inferiore a 10 *micron* (millesimi di mm).

Il valore di  $p$  viene determinato in modo da **minimizzare** la distorsione in tutto il campo dell'immagine e viene detto **distanza principale calibrata**  $p_c$ .

Variando la distanza principale si provoca una **rotazione** della *curva di distorsione* intorno all'origine, che pertanto assume l'aspetto illustrato in ► FIGURA 7, in cui appare evidente (rispetto alla corrispondente curva di ► FIGURA 5) la drastica diminuzione dei valori della distorsione radiale.



**FIGURA 6** Lo spostamento della lastra di pochi micron (in questo caso avvicinandola all'obiettivo), consente di annullare la distorsione nei punti immagine che si trovano su un cerchio di opportuno raggio. Per gli altri punti dell'immagine la distorsione non si annulla ma viene minimizzata.



**FIGURA 7** La *curva di distorsione*, ottenuta per correzione della distanza principale. Nell'esempio, è annullata la distorsione per i punti dell'immagine appartenenti a un cerchio ideale di raggio 70 mm; per gli altri punti dell'immagine la distorsione viene minimizzata.

In una camera **metrica**, dunque una camera appositamente costruita per la fotogrammetria, tali elementi vengono determinati dal costruttore nella fase di **calibrazione** della camera, e fornite con il relativo *certificato*.

## ■ Operazione di orientamento interno

L'impostazione dell'**orientamento interno** di ciascun fotogramma avviene (come peraltro l'*orientamento esterno*) negli stessi strumenti **restitutori** che forniranno poi il prodotto finale del rilievo fotogrammetrico.

### ● Operazione con restitutori analogici

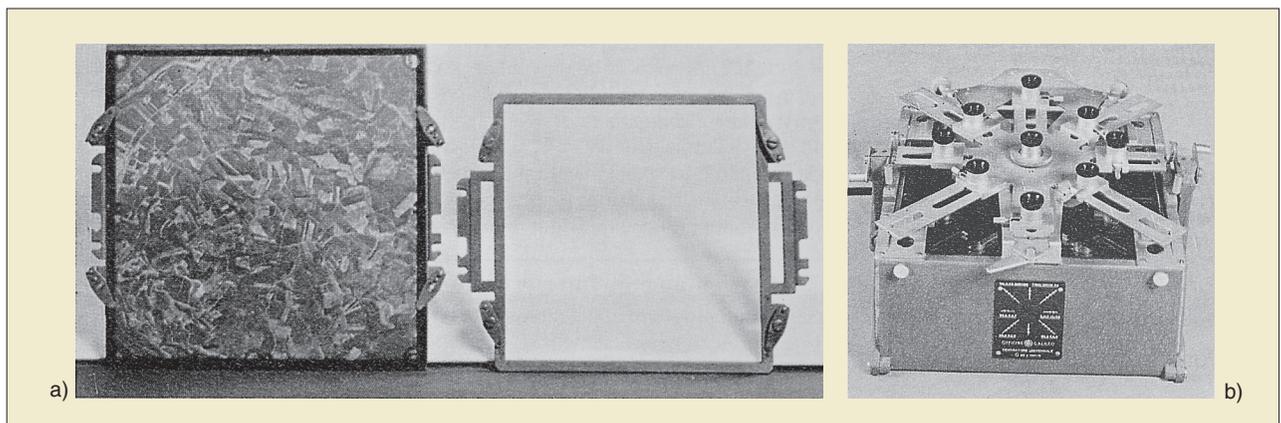
In passato la restituzione del rilievo fotogrammetrico avveniva con apparati **analogici**. Con questi strumenti i due fotogrammi venivano collocati su due «**proiettori**» che dovevano avere le stesse caratteristiche della camera da presa per quanto riguarda i parametri dell'*orientamento interno*.

Materialmente il **positivo**, sviluppato su poliestere trasparente, veniva montato su un **telaio portalastre** (► FIGURA 8a) e spianato con la sovrapposizione di una lastra di vetro a facce rigorosamente piane e parallele fermata da morsetti. Successivamente, a mezzo di quattro (o otto) *microscopi semplici* e di un **centratore** (► FIGURA 8b) a *viti micrometriche*, si fa in modo che le immagini delle quattro (o delle otto) **marche fiduciali** registrate sulla lastra coincidano con i corrispondenti segnali del *telaio portalastre*. Si impone, infine, sempre a mezzo di dispositivi a *vite micrometriche*, il valore della **distanza principale** riportata sul certificato di calibrazione della camera. Entrambe le condizioni vengono realizzate con la precisione del centesimo di millimetro. I restitutori a **proiezione meccanica** (i più utilizzati) erano provvisti di dispositivo a *pasticca* o a *lastra di vetro sagomata* per eliminare gli effetti della **distorsione**. A *orientamento interno ultimato*, è possibile ricostruire la stella dei raggi proiettanti in modo che a ogni raggio che è entrato nella camera da ripresa con una certa inclinazione corrisponda un raggio uscente con la stessa inclinazione.

### ● Operazione con restitutori analitici

Sono i restitutori utilizzati attualmente; sono dotati di uno **stereocomparatore** costituito da due **carrelli portalastra** (► FIGURA 9 e ► FIGURA 23 dell'unità T1), ciascuno con due **servomotori** per i movimenti *longitudinali* (*SX*) e *trasversali* (*SY*), che consentono non solo le operazioni di *orientamento*, ma anche l'acquisizione delle *coordinate lastra* delle coppie di *punti omologhi* necessarie alla restituzione. Essi sono forniti di uno *stereoscopio* a specchi per la **collimazione** dei *punti omologhi* nel modello tridimensionale (collimazione stereoscopica) e di un **computer** che, utilizzando appropriati *software* di sistema, sviluppa tutti i calcoli necessari nelle fasi di **orientamento** e *restituzione*.

**FIGURA 8** Portalastre (a) e centratore a microscopi (b) per effettuare l'orientamento interno in un restitutore analogico.



Il ripristino dei parametri di *orientamento interno* consiste nel comunicare al software la posizione del **punto principale** ( $x_O, y_O, p$ ) e la **curva di distorsione radiale**.

In questo caso, però, non avviene il centramento dei fotogrammi sui telaietti (come negli strumenti analogici): essi vengono collocati sui *carrelli portalastra* senza alcun centramento, con i bordi solo *approssimativamente* paralleli agli assi degli stessi carrelli.

Considerato che le **misure** della posizione dei **punti omologhi** sui fotogrammi vengono ottenute dalle **traslazioni** nelle direzioni  $SX$  e  $SY$  dei carrelli (*sistema di riferimento strumentale*), mentre nella procedura di restituzione, degli stessi punti sono necessarie le coordinate  $xy$  nel *sistema di riferimento interno* dei fotogrammi, si pone allora il problema di **trasformare** le prime (**coordinate carrello** o **strumentali**  $SX; SY$ ) nelle seconde (**coordinate lastra**  $x; y$ ) (► FIGURA 10).

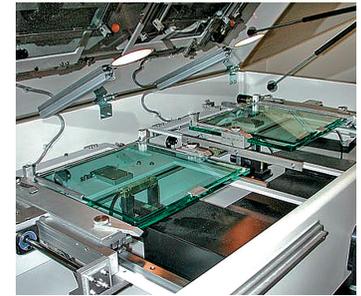
Questa operazione avviene tramite la **collimazione** iniziale delle **marche fiduciali** ( $M_1, M_2, M_3, M_4$ ) di ciascun fotogramma. Il *software* del restitutore confronta poi le **coordinate** delle quattro *marche* nel sistema di riferimento interno (**coordinate lastra**  $x_M; y_M$ ), reperibili sul *certificato di calibrazione*, con le corrispondenti **coordinate** nel sistema di riferimento strumentale (**coordinate strumentali**  $SX_M; SY_M$ ) ottenute dalle collimazioni effettuate. Queste otto coppie di coordinate (riferite a due diversi sistemi di riferimento) sono legate da relazioni di **rototraslazione piana** (nel piano della lastra), esprimibili dalle seguenti due equazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned} x_M &= (SX_M - SX_P) \cos \alpha - (SY_M - SY_P) \sin \alpha \\ y_M &= (SX_M - SX_P) \sin \alpha + (SY_M - SY_P) \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

In esse sono incognite  $SX_P$  e  $SY_P$ , coordinate del punto principale  $P$ , espresse nel sistema **strumentale**, e l'angolo  $\alpha$  formato tra gli assi dei due sistemi di riferimento.

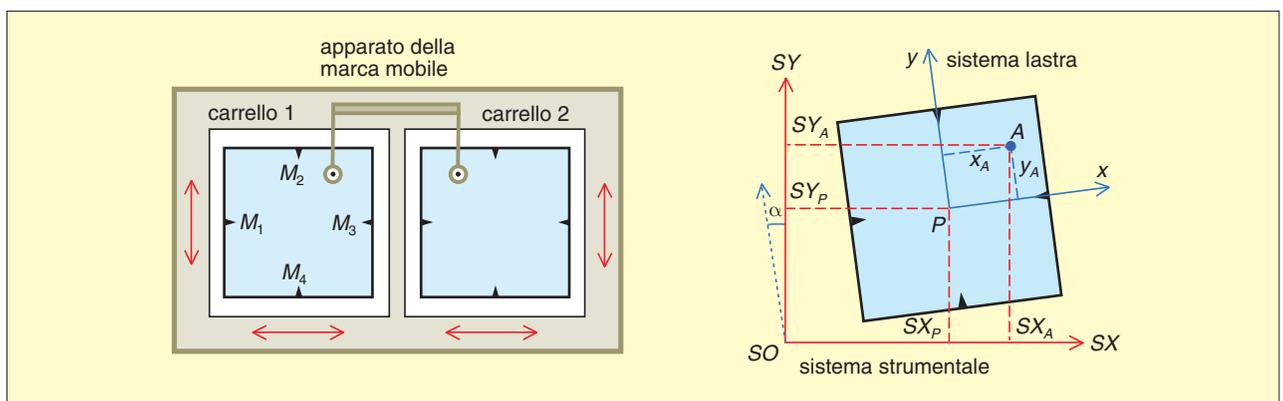
Le collimazioni delle quattro *marche fiduciali* forniscono quattro coppie di valori **misurati**  $SX_M, SY_M$ , e quattro coppie di valori **noti**  $x_M, y_M$ , dando vita a un sistema iperdeterminato di **8 equazioni** nelle 3 incognite  $SX_P, SY_P, \alpha$ . Il *software* del restitutore, risolvendo questo sistema, determina i valori **mediati** delle tre precedenti incognite, che verranno poi utilizzate nella procedura di **restituzione**.

Osserviamo che non è **strettamente necessario** collimare tutte e quattro (o otto) *marche fiduciali*. Se venissero collimate solo tre *marche fiduciali* il sistema precedente sarebbe costituito da 6 equazioni in 3 incognite, dunque ugualmente risolvibile. Tuttavia, per ottenere buone precisioni, in particolare per correggere bene le deformazioni isotrope, è importante utilizzare tutte le *marche* disponibili.



**FIGURA 9** Vista dei carrelli portalastra di un restitutore analogico; i fotogrammi sono sistemati tra due lamine piane di vetro. In primo piano è visibile il servomotore per la traslazione  $SY$  del carrello di sinistra. Si notano poi, in posizione rialzata, le due placchette circolari su cui sono incise le marche di collimazione stereoscopica (marca mobile).

**FIGURA 10** L'orientamento interno in un restitutore analogico prevede il montaggio dei due fotogrammi su due carrelli provvisti di movimenti longitudinali e trasversali, senza che ci sia esatto parallelismo tra le direzioni di movimento dei carrelli e gli assi del sistema lastra. Sarà poi il software, con una rototraslazione piana, a tenere conto di ciò.



## FAQ

► **Nei restitutori analitici il posizionamento dei fotogrammi sui portalastra deve avvenire con precisione?**

No, in quanto il corretto orientamento avviene a seguito della collimazione delle marche fiduciali, e dell'inserimento delle relative coordinate lastra che verranno poi trattate dal software del restitutore.

La conoscenza delle 3 incognite  $SX_P$ ,  $SY_P$  e  $\alpha$  consentirà poi al *software*, ogni volta che verrà collimato un generico **punto A** sul modello stereoscopico (► FIGURA 10), di eseguire una **rototraslazione** sul piano della lastra, **trasformando** le *coordinate strumentali*  $SX_A$ ,  $SY_A$  misurate dallo *stereocomparatore*, in *coordinate lastra*  $x_A$ ;  $y_A$  necessarie alla restituzione, utilizzando due equazioni analoghe alle (1).

Lo stesso *software* procede poi a compensare sia la **deformazione** isotropa della pellicola, sia le **distorsioni** dell'obiettivo utilizzando la *curva di distorsione* radiale precedentemente inserita.

### ● **Operazione con camere semimetriche**

Come sappiamo, queste camere vengono utilizzate nella fotogrammetria **non convenzionale** e non viene utilizzato un restitutore tradizionale, ma una semplice **tavoletta digitalizzatrice** che trasmette le misure al *computer* (non di sistema) dove vengono trattate dall'apposito *software*. Inoltre, in questo contesto si rinuncia alla *stereoscopia*, quindi le collimazioni sui fotogrammi avvengono in **monoscopia** (un fotogramma alla volta). Ricordiamo poi che i fotogrammi creati da queste camere non hanno marche fiduciali, ma un *reticolo calibrato* di croci detto *reseau* (► FIGURA 15 dell'unità T1).

La procedura di orientamento interno richiede la **collimazione** con il puntatore della tavoletta di tutte le croci (o solo di una parte) che definiscono il **reticolo** di un fotogramma alla volta, dopo averne inserite le rispettive coordinate riportate sul *certificato di calibrazione* della camera.

Successivamente, il *software* procede alla correzione delle **deformazioni** isotrope e di planarità della pellicola, trasladando tutti i punti e deformando la posizione dei nodi del *reseau* di un valore corrispondente alla **distorsione** radiale. In definitiva, viene creato il *sistema di riferimento interno* per ognuno dei fotogrammi.

## 3. Orientamento esterno

Una volta ricomposti i *fasci proiettivi* con l'operazione di *orientamento interno*, occorre ricollocare idealmente i due fotogrammi nella **stessa posizione** spaziale che avevano nella camera all'atto della presa. Questa operazione viene definita **orientamento esterno** dei fotogrammi.

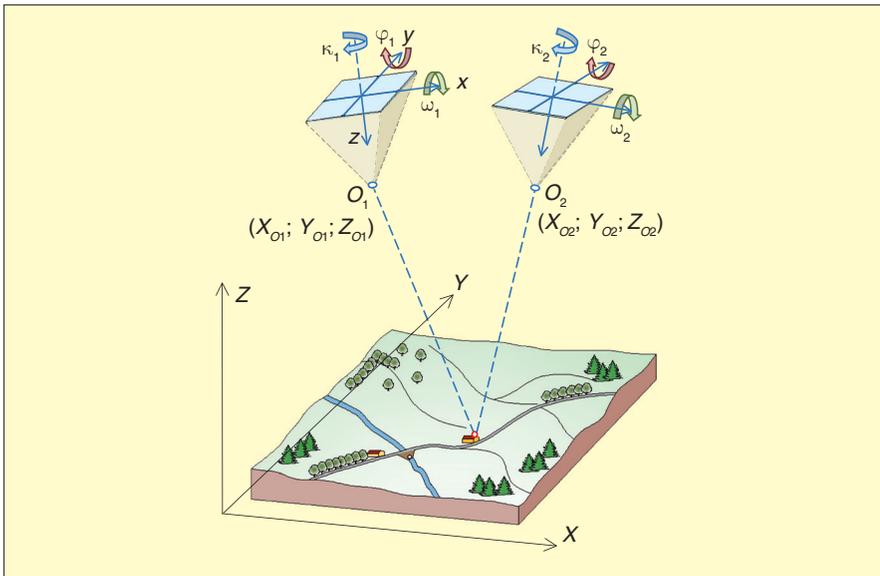
Per effettuare l'*orientamento esterno* è necessario determinare, per **ciascun** fotogramma, tanti **parametri** incogniti quanto sono i **movimenti** che definiscono la posizione di un corpo rigido nello spazio, cioè 6: **3 traslazioni** e **3 rotazioni**. Questi 6 parametri possono essere (► FIGURA 11):

- le 3 coordinate ( $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ ) del **centro di proiezione**  $O$ ;
- i 3 **angoli di rotazione**  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$  di assetto della camera.

Questi ultimi, nel caso di *presa aerea*, assumono il seguente significato:

- $\omega$  intorno asse  $x$  (direzione di volo) (*rollio*);
- $\varphi$  intorno asse  $y$  (*beccheggio*);
- $\kappa$  intorno asse  $z$  (*deriva*).

Dato che per ricostruire l'oggetto rilevato è necessario un certo numero di **modelli stereoscopici**, ciascuno generato dal ricoprimento di **due fotogrammi** consecutivi, per il loro *orientamento esterno* occorre determinare complessivamente  $6 + 6 = 12$  **parametri incogniti** (per ogni modello).



**FIGURA 11** Nell'operazione di orientamento esterno occorre disporre idealmente i due fotogrammi nella *stessa posizione* che avevano nella camera all'atto della presa. Per questa operazione sono necessari 12 parametri: le 3 coordinate del centro di presa e le 3 rotazioni di assetto della camera di ciascuno dei due fotogrammi consecutivi che concorrono alla generazione del modello stereoscopico dell'oggetto. Nella figura sono indicati tali parametri nello schema di una presa aerea.

Questi parametri vengono determinati nei **restitutori** in base alle **misure della posizione**, su entrambi i fotogrammi (coordinate lastra  $xy$ ), di alcune immagini di *punti omologhi* dell'oggetto, e in base a coordinate note di **punti di appoggio a terra**, anch'essi visibili sui due fotogrammi. Dal punto di vista analitico questa fase richiede la risoluzione di sistemi di equazioni sviluppati dal *software di sistema* del restitutore.

Operativamente l'*orientamento esterno* può essere eseguito con le seguenti diverse modalità:

- orientamento **contemporaneo** di due fotogrammi con un'**unica operazione**;
- orientamento **contemporaneo** di due fotogrammi in **due fasi** (dette orientamento *relativo* e *assoluto*);
- orientamento **indipendente** dei due fotogrammi.

La prima modalità è utilizzata solo nell'ambito della *restituzione analitica*, e ad essa accenneremo nel paragrafo 7 (*equazioni di collinearità*). La seconda fu concepita per le esigenze dei restitutori **analogici** (ormai abbandonati), tuttavia viene anche utilizzata nell'ambito della restituzione **analitica**, ed è a questa che faremo riferimento in questo paragrafo. Essa prevede la divisione della procedura operativa di *orientamento esterno* nelle seguenti due fasi temporali distinte:

- **orientamento relativo** (5 parametri incogniti): determinazione dei **parametri** che definiscono la posizione relativa assunta dalla **camera** nello spazio al momento della presa del **primo fotogramma**, rispetto alla posizione assunta dalla stessa camera al momento della presa del **secondo fotogramma**;
- **orientamento assoluto** (7 parametri incogniti): determinazione dei parametri di **rotazione**, **traslazione** e **fattore di scala** ( $3 + 3 + 1$ ), necessari a definire la corretta posizione nello spazio dell'oggetto rilevato.

## 4. Orientamento relativo

Non conoscendo, al momento, quale fosse la **posizione spaziale** della coppia di fotogrammi all'atto della presa (immaginandoli collegati rigidamente), rispetto al sistema di riferimento **assoluto**  $XYZ$  (o  $NEQ$ ) legato all'oggetto, con l'**orientamento relativo** essi verranno collocati l'uno rispetto all'altro nella stessa posizione reciproca che avevano al *momento della presa*, disponendo però i due centri di presa  $O_1$  e  $O_2$  (**base di presa**) a una distanza **arbitraria** (ciò genererà un *modello* a una *scala generica*).

### FAQ

► **In che cosa consiste, in estrema sintesi, l'orientamento esterno di una coppia di fotogrammi consecutivi?**

Nel determinare il valore di 12 parametri che attualmente avviene con la soluzione di un sistema di equazioni, nell'ambito dei restitutori analitici, ed effettuate dal software che gestisce il sistema.

Per determinare i parametri dell'*orientamento relativo* si adotta un sistema di riferimento **temporaneo  $X'Y'Z'$  solido con il primo fotogramma**, la cui configurazione spaziale **annulla 7** dei 12 parametri dell'*orientamento esterno*, lasciandone **5 da determinare**.

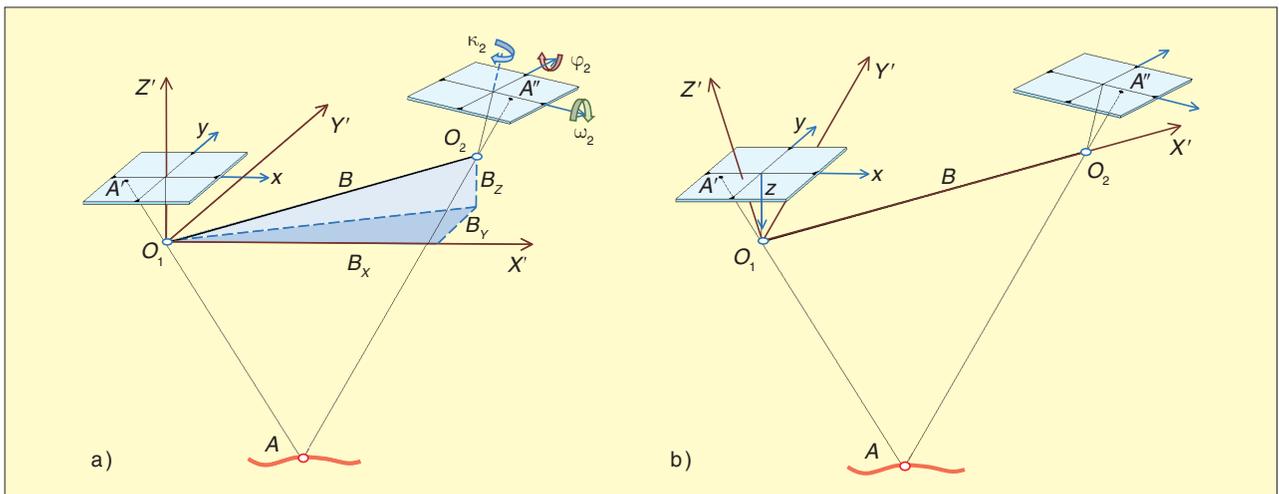
In relazione alla conformazione di questo sistema di riferimento temporaneo possiamo avere due tipologie di *orientamento relativo*.

- **Orientamento asimmetrico:** si calcolano solo i parametri di *orientamento relativo* del secondo fotogramma rispetto al primo considerato **fermo**. Il conseguente sistema di riferimento **temporaneo  $X'Y'Z'$**  ha origine in  $O_1$  e piano  $X'Y'$  parallelo al piano del fotogramma (► FIGURA 12a). In questo caso i parametri da determinare sono due delle tre componenti della **base di presa B** ( $B_y$  e  $B_z$ , mentre il valore arbitrario  $B_x$  condiziona la *scala* del modello), che definiscono la posizione del centro di presa  $O_2$ , e le 3 rotazioni del secondo fotogramma ( $\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ ). Questa soluzione trovava impiego prevalente nei restitutori **analogici**.
- **Orientamento simmetrico:** in questo caso **entrambi** i fotogrammi possono subire movimenti per raggiungere il corretto posizionamento relativo. La configurazione sistema di riferimento **temporaneo  $X'Y'Z'$**  possiede le seguenti caratteristiche (► FIGURA 12b):
  - l'origine  $O'$  coincidente con il **centro di presa  $O_1$**  del primo fotogramma;
  - l'asse  $X'$  passante per il **secondo punto di presa  $O_2$**  e **complanare** all'asse  $z$  del sistema di riferimento interno nella posizione  $O_1$ .
 L'orientamento *simmetrico* trova impiego prevalente negli attuali restitutori **analitici**.

Geometricamente i parametri di *orientamento relativo* dovrebbero essere 6 (quelli necessari a definire nello spazio i movimenti di un corpo rigido rispetto a un altro), ma sono ridotti a 5 dalle particolarità del *sistema di riferimento temporaneo* adottato. Nel caso dell'orientamento **simmetrico** i parametri dovrebbero essere 6 valori angolari  $\omega_1, \varphi_1, \kappa_1$  e  $\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ . Tuttavia, dato che in  $O_1$  l'asse  $X'$  è complanare all'asse  $z$  del sistema interno, ne deriva che  $\omega_1 = 0$ , quindi i parametri da definire nell'*orientamento relativo* si **riducono** a 5 e precisamente:  $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ .

I primi due angoli ( $\varphi_1, \kappa_1$ ) definiscono l'orientamento nello spazio della congiungente i centri di presa  $O_1$  e  $O_2$ , cioè della **base di presa B** (in questa fase di lunghezza *arbitraria*), mentre gli altri angoli  $\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$  definiscono l'assetto relativo del secondo fotogramma.

**FIGURA 12** (a) Sistema di riferimento temporaneo  $X'Y'Z'$  utilizzato nell'orientamento relativo asimmetrico. (b) Sistema di riferimento temporaneo  $X'Y'Z'$  utilizzato nell'orientamento relativo simmetrico.



Dopo questa fase, i due fotogrammi consecutivi, nel loro insieme, si troveranno in *una indeterminata posizione spaziale legata al sistema temporaneo  $X'Y'Z'$* , e le intersezioni dei raggi proiettanti omologhi daranno luogo alla **ricostruzione** di un oggetto, **simile** a quello reale (chiamato **modello**), ma in una **posizione generica** dello spazio e anche in una **scala arbitraria** (sarà poi compito dell'*orientamento assoluto* correggere tale situazione) ► FIGURA 13).

Non essendo nota la sua *scala* e il suo *orientamento assoluto*, da questo **modello** non è ancora possibile dedurre *informazioni metriche*, ma può essere solo esplorato.

Per determinare analiticamente i 5 parametri dell'*orientamento relativo*, il software di sistema del restitutore utilizza le condizioni di **intersezione** dei raggi proiettanti congiungenti un certo **numero di coppie** di *punti omologhi* con i corrispondenti **centri di presa**. Tali condizioni sono rappresentate analiticamente da un sistema di equazioni dette di **collinearità**.

In teoria, per realizzare l'*orientamento relativo* (cioè per ottenere i 5 parametri  $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ ) sarebbero sufficienti le equazioni ricavate considerando **5 coppie di raggi proiettanti** relativi a 5 coppie di *punti omologhi*, ben identificabili e collimabili sul *modello stereoscopico* generato dai due fotogrammi.

In realtà, per migliorare la qualità della determinazione di questi parametri, si sceglie un **numero sovrabbondante** di *punti omologhi* (**almeno 6**, ma talvolta fino a 12 e più), opportunamente distribuiti nella **zona di sovrapposizione** (*ricoprimento*) dei due fotogrammi (*modello stereoscopico*), ottenendo una migliore determinazione delle incognite (cioè dei parametri di *orientamento relativo*).

L'uso **sovrabbondante** di *punti omologhi* per realizzare l'*orientamento relativo* è anche da mettere in relazione alla grande **importanza** e alla delicatezza di questa fase, nella quale viene ricomposta la **forma** (anche se in una scala qualsiasi) dell'oggetto rilevato.

La scelta dei *punti omologhi* da utilizzare per risalire ai parametri di *orientamento relativo* è teoricamente arbitraria. Tuttavia, nella pratica, si fa riferimento a una configurazione ottimale della **distribuzione** di questi punti, teorizzata da **Otto Von Gruber**, secondo la quale è necessario che i punti omologhi siano disposti lungo il **perimetro** della **zona di ricoprimento** dei due fotogrammi, per ottenere un risultato ottimale nell'*orientamento relativo* ► FIGURA 14). I punti 1 e 2 corrispondono ai *punti principali* dei due fotogrammi, i punti 3 e 4 vengono scelti nella parte alta della zona di sovrapposizione e i punti 5 e 6 nella parte bassa.

Osserviamo, infine, che nell'*orientamento relativo* **non occorrono punti di appoggio** a terra, quindi l'**aumento** del numero di coppie di *punti omologhi* sulla zona di sovrapposizione dei due fotogrammi, rispetto al numero strettamente necessario, non comporta **alcun costo aggiuntivo** (in quanto si tratta di punti semplicemente **rintracciati** e **collimati** sui fotogrammi), né allungamento **dei tempi** di calcolo, in quanto le relative determinazioni sono eseguite in tempo reale dal software di sistema del restitutore.

Cosa diversa avverrà nel successivo **orientamento assoluto**, per il quale sarà necessario utilizzare coppie di *punti omologhi* sui fotogrammi, relativi a punti di **appoggio** a terra, per i quali deve essere determinata, con procedure **topografiche** tradizionali, o **GPS**, sul terreno, la posizione plano-altimetrica, il cui numero incide direttamente, e in modo significativo, sul costo del rilievo fotogrammetrico.

Arrivati a questo punto, quando vengono collimati sui due fotogrammi le **due immagini omologhe** di un generico punto  $P$ , il software di sistema eseguirà automaticamente le seguenti azioni:

#### FAQ

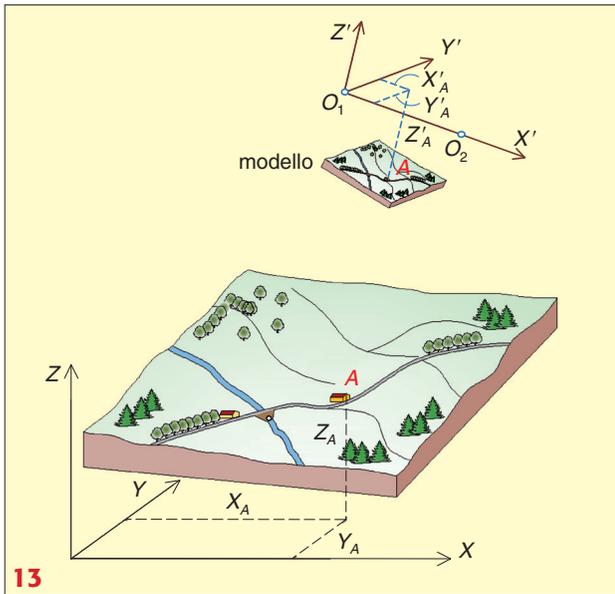
##### ► **Quale risultato pratico si ottiene dopo aver effettuato l'orientamento relativo?**

Si ottiene la ricostruzione dell'oggetto in una scala arbitraria e con un orientamento nello spazio generico. Essa viene denominata modello.

#### FAQ

##### ► **L'orientamento relativo richiede la collimazione di alcuni punti del modello stereoscopico; è necessario conoscere la posizione sul terreno di questi punti?**

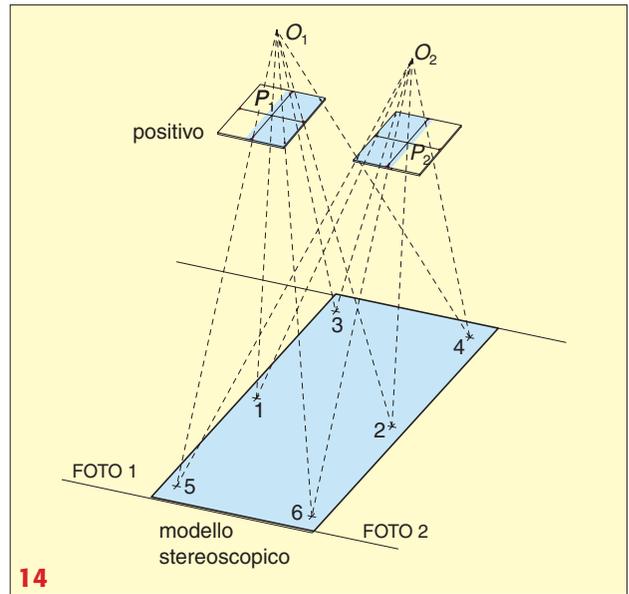
No, essi devono essere ben definiti sui fotogrammi, ma è necessaria solo la loro collimazione, mentre non è necessario conoscerne la posizione al suolo.



13

**FIGURA 13** Con l'orientamento relativo di due fotogrammi consecutivi si ottiene un oggetto simile a quello reale, detto *modello*, ma in una scala arbitraria e con una giacitura spaziale generica legata al sistema temporaneo  $X'Y'Z'$  adottato.

**FIGURA 14** Scelta dei punti sui fotogrammi per eseguire l'orientamento relativo. La loro configurazione ottimale prevede che essi siano scelti in prossimità del perimetro della zona di sovrapposizione dei due fotogrammi consecutivi. Il loro numero minimo è di 5, tuttavia è buona norma pratica che essi siano in numero maggiore (nella figura sono 6) per definire con maggior precisione i parametri dell'orientamento relativo.



14

- misura delle coordinate  $(SX_1; SY_1)$  e  $(SX_2; SY_2)$  nel **sistema carrello (strumentale)**, che vengono poi trasformate in **coordinate lastra**  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$  con la (1) nell'ambito dell'**orientamento interno**;
- successivamente, lo stesso *software di sistema*, utilizzando le due coppie di coordinate lastra  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$ , calcola le coordinate  $(X'_p; Y'_p; Z'_p)$  nel *sistema di riferimento temporaneo* scelto per l'**orientamento relativo**.

Ora il problema resta quello di ottenere, da queste coordinate  $(X'_p; Y'_p; Z'_p)$ , riferite al *sistema di riferimento temporaneo*, quelle reali  $(X_p; Y_p; Z_p)$ , relative al sistema di riferimento legato all'oggetto rilevato; questo compito è assegnato all'**orientamento assoluto**.

## 5. Orientamento assoluto

Con l'operazione di **orientamento assoluto**, il **modello** ottenuto nella fase precedente, vincolato al suo sistema di riferimento temporaneo (che non corrisponde per **scala e collocazione** nello spazio a quella reale dell'oggetto), viene **trasformato** convertendolo alla **scala desiderata** e imponendogli lo stesso **orientamento** dell'oggetto ripreso. I suoi punti dovranno essere riferiti a un *sistema cartesiano assoluto* che, nel caso di fotogrammetria aerea, sarà il sistema cartografico Gauss-Boaga (ENQ), mentre nella fotogrammetria terrestre sarà un generico sistema cartesiano  $XYZ$  legato all'oggetto rilevato.

Nell'ambito delle operazioni di *orientamento assoluto*, pertanto, vengono determinati i **7 parametri incogniti** che consentiranno la **scalatura** e la **trasformazione** del *modello stereoscopico* (orientato in modo relativo) prima descritte. Geometricamente la modifica di **scala** del modello è consentita dal **singolo** parametro moltiplicativo  $m$ , mentre gli altri 6 parametri derivano dalla **rototraslazione** di un corpo rigido nello spazio, dunque costituita da 3 traslazioni e da 3 rotazioni applicate a **uno qualunque** dei due fotogrammi che, rigidamente, generano il *modello stereoscopico*. In sintesi questi 7 parametri sono:

- $m$ : fattore di scala;
- $X_O, Y_O, Z_O$ : coordinate assolute del centro di presa  $O$  del fotogramma scelto per la trasformazione;
- $\omega, \varphi, \kappa$ : angoli di rotazione del fotogramma scelto.

Una volta determinate queste 7 incognite, al *modello stereoscopico* può essere applicato il **coefficiente di scala**  $m$ , e gli vengono impresse le tre **traslazioni**  $X_O$ ,  $Y_O$ ,  $Z_O$  e le tre **rotazioni**  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ , in modo che esso vada in **coincidenza** con l'oggetto reale scalato.

Per poter determinare queste 7 incognite è necessaria la conoscenza della **posizione** (in coordinate assolute  $XYZ$ ) di un certo numero di punti appartenenti all'oggetto (naturalmente ben identificabili e rintracciabili sui fotogrammi), detti di **punti di appoggio**.

Nel caso di rilievo aereo essi saranno punti del territorio, nel caso di rilievo terrestre i punti di appoggio saranno scelti sull'oggetto rilevato (in genere un edificio o un elemento architettonico).

Alcuni di questi punti (pochi) potrebbero essere **già noti**, in quanto *vertici trigonometrici* delle reti di nazionali. Tuttavia, più in generale, la loro posizione dovrà essere **determinata** con apposite operazioni. In relazione alla natura, questi punti possono essere classificati come:

- **naturali**: sono selezionati tra i **manufatti preesistenti** sul terreno e devono essere ben riconoscibili sui fotogrammi;
- **artificiali**: sono **realizzati** per l'occasione; devono poi essere **segnalati** in modo opportuno affinché siano visibili dall'alto e siano ben distinguibili sui fotogrammi (► FIGURA 15).

La posizione di questi punti di **appoggio a terra** dovrà essere determinata con le **tradizionali operazioni topografiche**, con il **GPS** o con altre procedure (*triangolazione aerea*) di cui si parlerà in seguito.

È bene non confondere questi **punti di appoggio a terra** di posizione nota, necessari alla operazione di *orientamento assoluto* (impegnativi da ottenere), con i punti selezionati **solo sui fotogrammi** necessari all'*orientamento relativo* (comodi in quanto richiedono la semplice collimazione al restitutore).

La determinazione dei 7 parametri incogniti dell'*orientamento assoluto* richiede l'impostazione di **almeno 7** equazioni di **rototraslazione** (per ciascun modello stereoscopico) che mettano in relazione le coordinate dei punti nei due sistemi **assoluto** ( $XYZ$ ) e **provvisorio** ( $X'Y'Z'$ ) (*orientamento relativo*), e nelle quali le uniche incognite siano i 7 parametri:  $m$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ .

Gli elementi noti delle equazioni sono:

- le coordinate ( $X'_A$ ;  $Y'_A$ ;  $Z'_A$ ) dei punti del *modello stereoscopico* riferite al *sistema temporaneo dell'orientamento relativo* (calcolate a partire dalle coordinate lastra ( $x_1$ ;  $y_1$ ) e ( $x_2$ ;  $y_2$ ) dei punti omologhi misurate sui due fotogrammi);
- **almeno 7 coordinate** nel sistema assoluto  $XYZ$  solidale all'oggetto.

Queste ultime coordinate **sono fornite dai punti di appoggio** del rilievo, e considerando che ogni punto di appoggio noto permette di scrivere **tre equazioni** (una per ciascuna delle tre coordinate spaziali), teoricamente sarebbero sufficienti i seguenti **3 punti** di appoggio **non allineati**:

- 2 punti plano-altimetrici ( $X$ ;  $Y$ ;  $Z$ ), che forniscono  $3 + 3 = 6$  equazioni;
- 1 punto di quota nota ( $Z$ ), che fornisce 1 equazione.

Nella pratica, tuttavia, è sempre opportuno fare riferimento a un **numero di punti più grande** di quello strettamente necessario (tre).

L'**esperienza** consolidata indica che i punti di appoggio a terra noti siano **almeno 5** per **ciascun modello stereoscopico**; di questi, per quattro devono essere note le coordinate assolute **plano-altimetriche** (le tre coordinate spaziali), mentre del quinto è sufficiente conoscere la sola **quota**.



**FIGURA 15** Segnalazione di un punto di appoggio artificiale a terra per l'operazione di orientamento assoluto dei fotogrammi. Dimensioni, forma e colori sono scelti in funzione del loro facile riconoscimento sui fotogrammi tenendo conto della loro scala.

#### FAQ

► **Dal punto di vista matematico, in che cosa consiste l'orientamento assoluto?**

In una rototraslazione spaziale del modello, e una successiva scalatura con un parametro. Tali operazioni richiedono la conoscenza della posizione di alcuni punti a terra, e vengono sviluppate dal software di sistema dei restitutori analitici.

In questo modo le incognite vengono determinate in modo mediato, ed è possibile **controllare** e **valutare** la precisione complessiva del rilievo fotogrammetrico.

### ■ Osservazione sui punti di appoggio nell'orientamento assoluto

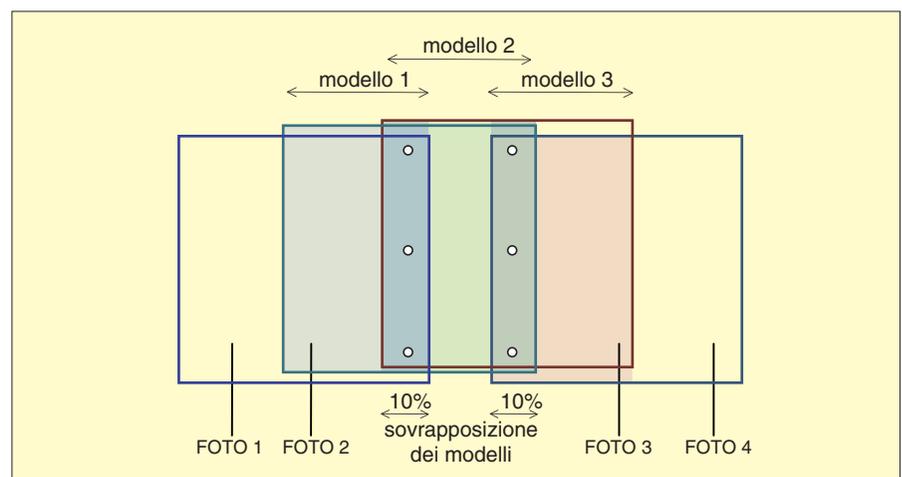
Come detto, l'**esperienza** richiede che in ciascun modello stereoscopico (generato da due fotogrammi consecutivi) siano presenti almeno **5 punti** di appoggio noti. Osserviamo poi che il complesso del rilievo fotogrammetrico **non** è costituito da una sola coppia di fotogrammi che generano un solo modello stereoscopico, ma la copertura fotografica dell'oggetto è costituita da un **certo numero** (talvolta anche elevato) di fotogrammi che, presi a due a due, generano un conseguente numero  $n$  di *modelli stereoscopici*. Pertanto, in teoria (ma solo in teoria), il numero dei punti di appoggio **dovrebbe** essere **almeno**  $5 \cdot n$ .

Nella fotogrammetria terrestre (per le piccole dimensioni dell'oggetto) il numero di punti di appoggio è limitato e non costituisce un grosso problema. Nella fotogrammetria aerea, al contrario, le **grandi estensioni** di terreno da coprire richiederebbero un **numero rilevante** di punti di appoggio, facendo lievitare in modo significativo il **costo** del rilievo.

Per limitare, questo problema, nel rilievo aereo, i punti di appoggio vengono collocati **in modo opportuno** sui fotogrammi in modo che essi non vengano utilizzati in un solo *modello*, ma anche in quello adiacente, **limitandone** il numero necessario.

A questo proposito, ricordiamo che se i *modelli stereoscopici* sono stati generati da due fotogrammi consecutivi con un valore (prevalente) del **ricoprimento longitudinale**  $\mu = 60\%$ , essi, a loro volta, si **sovrappongono** tra di loro, in senso longitudinale, con strisce larghe il 10% del formato del fotogramma (► FIGURA 18 dell'unità T1 e ► FIGURA 4 dell'unità T2), a *sinistra* col modello precedente, e a *destra* col modello seguente (► FIGURA 16). Queste strisce laterali di sovrapposizione contengono punti appartenenti a **tre fotogrammi** consecutivi, inoltre ciascuna di esse contiene il **punto principale** (proiezione del centro di presa  $O$  sul fotogramma) di uno di questi fotogrammi.

Se i punti di appoggio, in prevalenza, vengono collocati in queste **strisce di sovrapposizione** dei *modelli stereoscopici*, si ottiene una significativa **diminuzione** del loro numero, rispetto a quello derivante dal calcolo teorico prima accennato, in quanto gli stessi punti possono essere utilizzati in **due modelli** consecutivi.



**FIGURA 16** I punti di appoggio a terra necessari all'orientamento assoluto sono collocati in corrispondenza delle strisce di sovrapposizione (10%) dei modelli stereoscopici. In questo modo gli stessi punti servono all'orientamento di due modelli.

Nella ► FIGURA 16 sono riportati quattro fotogrammi consecutivi che generano tre modelli stereoscopici; per l'orientamento assoluto del **modello 2**, sono stati collocati 3 **punti di appoggio** nella striscia di sovrapposizione del 10% a sinistra, e 3 in quella di destra. I primi 3 punti sono poi utilizzati anche nell'orientamento del **modello 1**, mentre i secondi 3 punti sono utilizzati anche nell'orientamento del **modello 3**.

A partire dagli anni Sessanta del secolo scorso, con l'affermarsi della fotogrammetria **analitica**, è poi stata introdotta, nella *fotogrammetria aerea*, una tecnica con cui si **riduce** ulteriormente e **drasticamente** il numero di *punti di appoggio* necessari all'orientamento esterno. Tale tecnica è detta **triangolazione aerea** e verrà brevemente illustrata nel prossimo paragrafo.

## 6. Triangolazione aerea

Si è appena visto che, nell'operazione di *orientamento esterno* di fotogrammi, sono necessari almeno 5 punti di appoggio a terra per ogni *modello stereoscopico*. Per ottenere questi elementi si dovrebbe procedere con **operazioni topografiche**, tradizionali o **GPS**, comunque assai onerose in termini di tempo e di costi.

Per porre rimedio a questo problema è stata sviluppata una tecnica detta **triangolazione aerea**, la quale consente di ottenere la parte prevalente dei *punti d'appoggio* **dagli stessi fotogrammi** (con procedure analitiche), limitando drasticamente le operazioni di rilievo topografico tradizionale o GPS.

Si tratta di una procedura che consente di **collegare** tutti i modelli stereoscopici generati da coppie consecutive di fotogrammi considerandoli come un unico **blocco** (una o più strisciate), per l'**orientamento** del quale vengono utilizzati **pochi punti** di appoggio a terra (mediante il 10-20% rispetto alle tecniche tradizionali). Essa è stata resa possibile dall'avvento della **fotogrammetria analitica**, in quanto per la sua attuazione richiede grandi risorse di calcolo.

Essa può seguire le seguenti due distinte procedure, entrambe analitiche:

- procedura a **modelli indipendenti**;
- procedura a **stelle di raggi proiettivi**.

Nel primo caso la **triangolazione aerea** consiste nelle seguenti fasi.

- Costituzione di un **blocco** di *modelli stereoscopici*; per essi viene effettuato soltanto l'**orientamento relativo**. Ricordiamo che questa operazione non richiede nessun punto di appoggio a terra, ma solo punti scelti sui fotogrammi.
- I *modelli* appartenenti al *blocco* vengono poi **collegati** tra loro mediante un certo numero di punti comuni, detti **punti di passaggio**, e collocati nelle **fasce di sovrapposizione** del 10% comuni a due modelli adiacenti (dunque a 3 fotogrammi consecutivi).
- Questo **blocco** di modelli, di fatto, realizza un **unico grande modello** il cui **orientamento assoluto** può essere effettuato, in teoria, con 5 soli punti (o addirittura 3), cioè quelli necessari a orientare un solo modello; tuttavia, per contenere la *propagazione degli errori* che la procedura provoca, se ne usano altri distribuiti lungo il blocco di fotogrammi.
- Come conseguenza delle precedenti operazioni, tutti i *modelli* che costituiscono il blocco sono *orientati correttamente*, ed è pertanto possibile, per ciascuno di essi, **individuare** un certo numero di punti di appoggio e **ricavare** analiticamente le corrispondenti **coordinate assolute**.
- La conoscenza delle *coordinate assolute* di questi **punti di appoggio «ricavati»**, consente poi di effettuare l'*orientamento assoluto*, in modo indipendente nell'ambito di ciascun *modello stereoscopico*.

### FAQ

► **La definizione dei punti noti al suolo, per eseguire l'orientamento assoluto, è una fase onerosa del rilievo fotogrammetrico?**

Sì, tanto che si mettono in essere procedure e accorgimenti che riducano drasticamente il loro numero.

## 7. Equazioni di collinearità

### ■ Premessa

Nell'ambito del paragrafo 2 dell'unità T1, nell'espone il principio su cui si fonda la fotogrammetria, si è detto che a ogni generico punto  $A$  dell'oggetto corrisponde il punto immagine *omologo*  $A_1$  sul primo fotogramma e il punto  $A_2$  sul secondo fotogramma. Conoscendo la **posizione** dei *punti omologhi*  $A_1$  e  $A_2$  sui due fotogrammi (*coordinate lastra*), e la posizione spaziale delle due *lastre* e dei due *punti di presa*  $O_1$  e  $O_2$ , il punto  $A$  viene geometricamente definito dalla **intersezione** dei due *raggi proiettanti*  $r_1$  e  $r_2$  che congiungono i due punti omologhi  $A_1$  e  $A_2$  con i corrispondenti centri di presa  $O_1$  e  $O_2$  (► FIGURA 3 dell'unità T1).

In passato questa *intersezione* veniva simulata con strumenti ottico-meccanici di tipo *analogico*, che permettevano di stabilire la posizione del generico punto  $A$  nell'ambito di uno spazio oggetto ricostruito in scala ridotta detto *modello* (*fotogrammetria analogica*). Oggi la posizione dello stesso punto  $A$  dell'oggetto viene ottenuta calcolando le coordinate dell'**intersezione** nello spazio delle rette  $r_1$  e  $r_2$  attraverso la soluzione di un **sistema di equazioni** dette di **collinearità** (*fotogrammetria analitica*).

Queste equazioni, che costituiscono il principio base della *fotogrammetria analitica*, esprimono la circostanza che, per ogni fotogramma, il **centro di presa**  $O$ , il **punto oggetto**  $A$  e il **punto immagine**  $A_1$  sul fotogramma sono **allineati** sullo stesso *raggio proiettante*  $r$ .

In estrema sintesi, dalle equazioni delle due rette nello spazio (relative a due *prese consecutive*), che esprimono la condizione di *collinearità* per ciascuno dei due *raggi proiettanti*, si potrà poi determinare la posizione del punto di **intersezione**, che costituisce il punto oggetto  $A$  che ha generato le due immagini  $A_1$  e  $A_2$  sui due fotogrammi.

### ■ Il sistema interno della camera

Finora, per motivi di opportunità e di semplificazione, si è considerato il *sistema interno* della camera come indicato nella ► FIGURA 17a, la cui origine era collocata sull'intersezione delle *marcine fiduciali*. Ciò era consentito dal fatto che finora si sono sempre considerate le *coordinate lastra* dei punti omologhi sui fotogrammi in termini **bidimensionali** ( $xy$ ). Tuttavia, nell'ambito della **fotogrammetria analitica**, è necessario che la posizione degli stessi punti delle immagini sui fotogrammi sia espressa attraverso **coordinate tridimensionali**, rispetto al sistema di **riferimento interno** della camera così definito (► FIGURA 17b):

- origine coincidente con il centro di presa  $O$ ;
- asse  $z$  coincidente con l'asse della camera;
- assi  $x$  e  $y$  **paralleli** alle congiungenti delle *marcine fiduciali* del fotogramma ( $x$  direzione di volo).

Evidentemente, con riferimento a questo sistema, la coordinata  $z$  di un qualunque punto immagine coincide con la *distanza principale*:  $z = p$ , se si considera il **negativo**. Se invece si considera il **positivo** si ha che  $z = -p$  (► FIGURA 17b). È altrettanto evidente che le due coordinate  $x$  e  $y$  sono perfettamente uguali a quelle misurate sul piano del fotogramma.

### ■ La condizione di collinearità

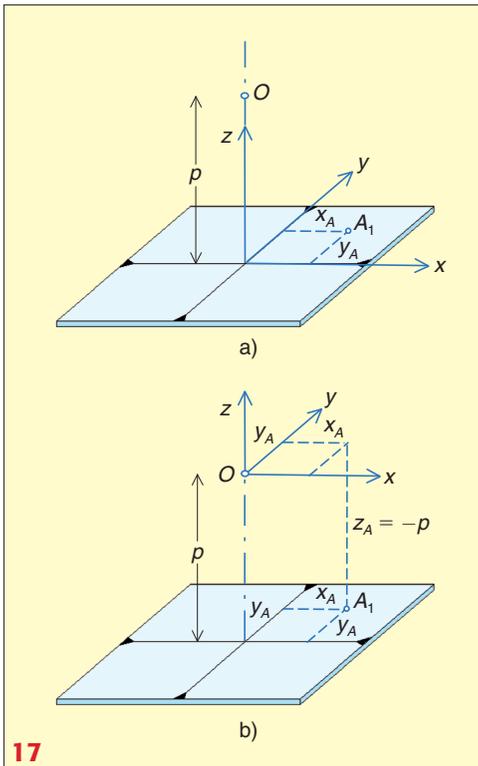
Le **equazioni di collinearità** governano le seguenti tre fasi del processo fotogrammetrico:

- **presa**: passaggio dalla posizione dei punti oggetto alla posizione dei punti immagine;

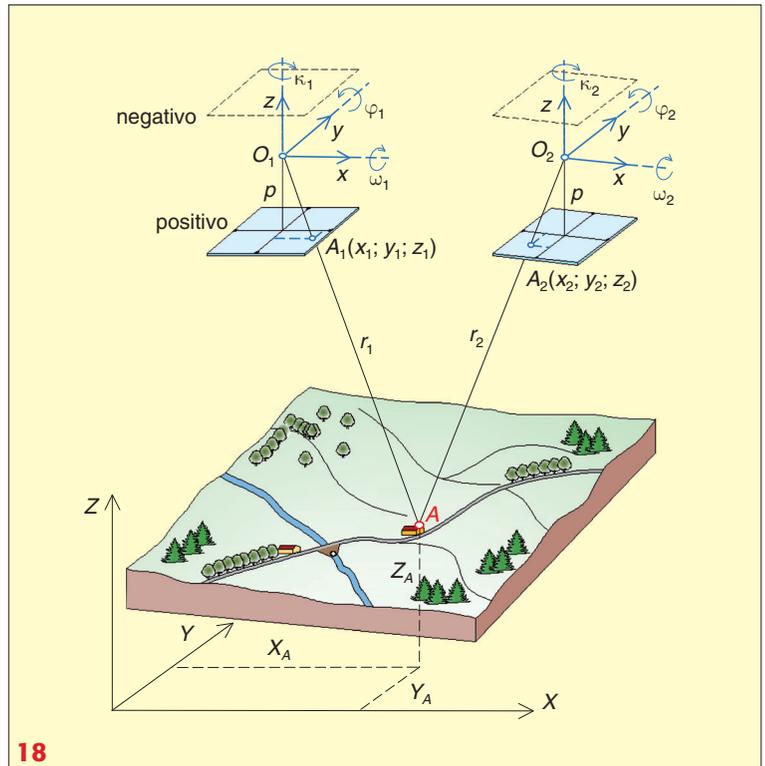
#### FAQ

► **Quale condizione geometrica consente la determinazione della posizione spaziale dei punti degli oggetti ripresi nei fotogrammi?**

L'intersezione di due rette nello spazio che passano per un punto dell'oggetto, per i centri di presa di due fotogrammi consecutivi, e per le immagini omologhe dello stesso punto su entrambi i fotogrammi.



17



18

- **orientamento:** calcolo dei relativi parametri;
- **restituzione:** calcolo delle coordinate dei punti oggetto.

Queste relazioni si determinano scrivendo le **equazioni di una retta** nello spazio che definisca l'allineamento dei tre punti citati in precedenza ( $O_1$ ,  $A_1$ ,  $A$ ) e la **trasformazione spaziale (rototraslazione)** tra i due seguenti **sistemi di riferimento**:

- il **sistema assoluto XYZ**, a cui andranno riferiti i punti dell'oggetto da rilevare;
- il **sistema interno xyz** del fotogramma, definito in precedenza.

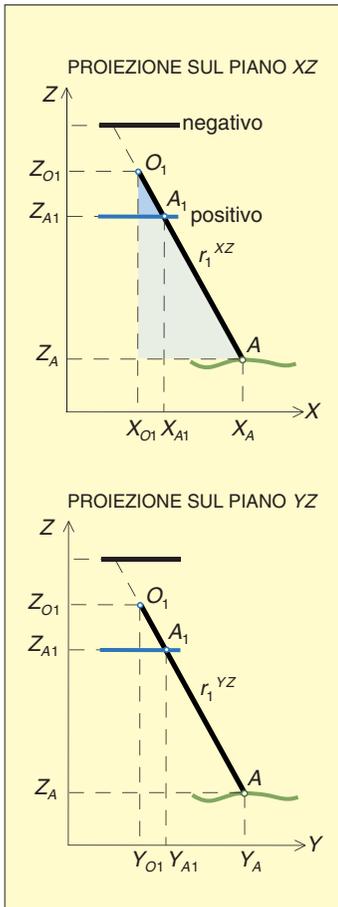
Nella ►FIGURA 18 è schematizzata la geometria prima descritta che verrà utilizzata per ottenere le *equazioni di collinearità* di due raggi proiettanti  $r_1$  e  $r_2$  relativi al generico punto oggetto  $A$ ; in essa è riportata l'immagine **positiva** (ciò perché sono i fotogrammi **positivi** che vengono utilizzati negli strumenti *restitutori*); tuttavia nulla cambierebbe considerando l'immagine **negativa**, in quanto i *raggi proiettanti* rimangono gli stessi. In essa si fa riferimento alla configurazione della *presa aerea*; nondimeno le stesse deduzioni si possono ottenere considerando la configurazione della presa terrestre.

Osserviamo che gli assi dei *sistemi di riferimento interni xyz* relativi ai fotogrammi in entrambe le posizioni di presa **non sono paralleli** agli assi del sistema  $XYZ$ ; come, peraltro, i due punti di presa  $O_1$  e  $O_2$  presentano diversi valori per tutte le rispettive coordinate assolute. Ciò è dovuto alla circostanza che, durante la ripresa dei fotogrammi, la traiettoria dell'aereo non è esattamente rettilinea e l'assetto delle camere (a causa dei movimenti dell'aereo) non rimane immutato tra uno scatto e quello successivo.

Allo scopo di scrivere la **prima equazione di collinearità** relativa al raggio proiettante  $r_1$  riferito al punto immagine  $A_1$  sul fotogramma di sinistra, utilizzeremo la seguente simbologia:

**FIGURA 17** Il sistema di riferimento interno della camera. Nell'ambito della fotogrammetria analitica si fa riferimento a un sistema la cui origine si trova nel punto di presa  $O$  allo scopo di fornire le coordinate dei punti immagine in modo tridimensionale.

**FIGURA 18** All'atto di ciascuna presa il centro di proiezione  $O_1$ , il punto oggetto  $A$  e il punto immagine  $A_1$  sul fotogramma sono allineati sullo stesso raggio proiettante  $r_1$ . Tale osservazione è alla base delle equazioni di collinearità che governano la fotogrammetria analitica.



**FIGURA 19** La proiezione del raggio proiettante  $r_1$  sui due piani XZ e YZ consente di scrivere le relazioni analitiche che condurranno alle equazioni di collinearità. Si osserva anche che è del tutto indifferente utilizzare, a questo fine, il positivo o il negativo, in quanto il raggio proiettante  $r_1$  è il medesimo.

- $X_A, Y_A, Z_A$ : coordinate del generico punto  $A$  dell'oggetto nel **sistema assoluto XYZ**;
- $X_{O_1}, Y_{O_1}, Z_{O_1}$ : coordinate del centro di presa  $O_1$  nel **sistema assoluto XYZ**;
- $x_1, y_1, z_1$ : coordinate di  $A_1$ , immagine di  $A$  sul fotogramma, nel **sistema interno xyz**;
- $X_{A_1}, Y_{A_1}, Z_{A_1}$ : coordinate dell'immagine  $A_1$  nel **sistema assoluto XYZ**.

Ora possiamo scrivere l'equazione della retta  $r_1$  passante per i punti  $A, A_1$  e  $O_1$ . Per questo consideriamo le proiezioni  $r_1^{XZ}$  e  $r_1^{YZ}$  di  $r_1$  sui due piani XZ e YZ del *sistema assoluto* (► FIGURA 19).

Dalla similitudine dei triangoli retti in entrambe le proiezioni si ottengono le seguenti relazioni analitiche:

$$\frac{X_A - X_{O_1}}{Z_{O_1} - Z_A} = \frac{X_{A_1} - X_{O_1}}{Z_{O_1} - Z_{A_1}} \quad \frac{Y_A - Y_{O_1}}{Z_{O_1} - Z_A} = \frac{Y_{A_1} - Y_{O_1}}{Z_{O_1} - Z_{A_1}} \quad (2)$$

Allo stesso modo, dal fotogramma di destra, con analogia simbologia, si ottengono le seguenti relazioni di similitudine che esprimono la collinearità per il raggio proiettante  $r_2$ :

$$\frac{X_A - X_{O_2}}{Z_{O_2} - Z_A} = \frac{X_{A_2} - X_{O_2}}{Z_{O_2} - Z_{A_2}} \quad \frac{Y_A - Y_{O_2}}{Z_{O_2} - Z_A} = \frac{Y_{A_2} - Y_{O_2}}{Z_{O_2} - Z_{A_2}} \quad (2')$$

Osserviamo, tuttavia, che nelle precedenti quattro relazioni sono presenti le coordinate (non conosciute)  $(X_{A_1}, Y_{A_1}, Z_{A_1})$  e  $(X_{A_2}, Y_{A_2}, Z_{A_2})$  dei due punti immagine  $A_1$  e  $A_2$  (punti omologhi) di  $A$ , rispetto al **sistema di riferimento assoluto XYZ**, mentre non compaiono le *coordinate lastra*  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  degli stessi punti immagine, che invece possono essere note, in quanto **misurabili** con lo *stereocomparatore* di cui è dotato qualunque restitutore analitico.

Il problema, dunque, è ora quello di esprimere le coordinate  $(X_{A_1}, Y_{A_1}, Z_{A_1})$  e  $(X_{A_2}, Y_{A_2}, Z_{A_2})$  in funzione delle corrispondenti *coordinate lastra*  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  attraverso la **trasformazione** (rototraslazione nello spazio) anticipata in precedenza.

Per tale trasformazione vengono utilizzati i parametri di **assetto angolare** in ciascuna delle due prese:

- $\omega_1, \varphi_1, \kappa_1$ : assetto angolare degli assi del sistema interno xyz rispetto agli assi del sistema assoluto XYZ nella presa da  $O_1$  (► FIGURA 18);
- $\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ : assetto angolare degli assi del sistema interno xyz rispetto agli assi del sistema assoluto XYZ nella presa da  $O_2$ .

I passaggi matematici concernenti tale trasformazione di coordinate travalicano le competenze richieste nel nostro ambito didattico (geometria analitica dello spazio e calcolo matriciale), pertanto ci limitiamo a proporre il risultato finale della **trasformazione**, rispettivamente per il fotogramma di sinistra e di destra:

$$\begin{cases} X_{A_1} = X_{O_1} + a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ Y_{A_1} = Y_{O_1} + a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ Z_{A_1} = Z_{O_1} + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{A_2} = X_{O_2} + b_{11}x_2 + b_{12}y_2 + b_{13}z_2 \\ Y_{A_2} = Y_{O_2} + b_{21}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23}z_2 \\ Z_{A_2} = Z_{O_2} + b_{31}x_2 + b_{32}y_2 + b_{33}z_2 \end{cases} \quad (3)$$

In esse i coefficienti  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  (*coseni direttori* degli assi xyz rispetto agli assi XYZ) hanno i seguenti valori:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi_1 \cdot \cos \kappa_1 & b_{11} &= \cos \varphi_2 \cdot \cos \kappa_2 \\ a_{12} &= \cos \omega_1 \cdot \sin \kappa_1 + \sin \omega_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \kappa_1 & b_{12} &= \cos \omega_2 \cdot \sin \kappa_2 + \sin \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \kappa_2 \\ a_{13} &= \sin \omega_1 \cdot \sin \kappa_1 - \cos \omega_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \kappa_1 & b_{13} &= \sin \omega_2 \cdot \sin \kappa_2 - \cos \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \kappa_2 \\ a_{21} &= -\cos \omega_1 \cdot \sin \kappa_1 & b_{21} &= -\cos \varphi_2 \cdot \sin \kappa_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= \cos \omega_1 \cdot \cos \kappa_1 - \sin \omega_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \kappa_1 & b_{22} &= \cos \omega_2 \cdot \cos \kappa_2 - \sin \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \kappa_2 \\
 a_{23} &= \sin \omega_1 \cdot \cos \kappa_1 + \cos \omega_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \kappa_1 & b_{23} &= \sin \omega_2 \cdot \cos \kappa_2 + \cos \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \kappa_2 \\
 a_{31} &= \sin \varphi_1 & b_{31} &= \sin \varphi_2 \\
 a_{32} &= -\sin \omega_1 \cdot \cos \varphi_1 & b_{32} &= -\sin \omega_2 \cdot \cos \varphi_2 \\
 a_{33} &= \cos \omega_1 \cdot \cos \varphi_1 & b_{33} &= \cos \omega_2 \cdot \cos \varphi_2
 \end{aligned} \quad (4)$$

Sostituendo i valori delle (3) nelle (2) e (2'), e ricordando che  $z_1 = z_2 = -p$ , si ottengono le equazioni:

$$\left. \begin{aligned}
 X_A &= X_{O1} + (Z_A - Z_{O1}) \cdot \frac{a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot y_1 + a_{13} \cdot p}{a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot y_1 + a_{33} \cdot p} \\
 Y_A &= Y_{O1} + (Z_A - Z_{O1}) \cdot \frac{a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot y_1 + a_{23} \cdot p}{a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot y_1 + a_{33} \cdot p}
 \end{aligned} \right\} \text{fotogramma sinistro} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 X_A &= X_{O2} + (Z_A - Z_{O2}) \cdot \frac{b_{11} \cdot x_2 + b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot p}{b_{31} \cdot x_2 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot p} \\
 Y_A &= Y_{O2} + (Z_A - Z_{O2}) \cdot \frac{b_{21} \cdot x_2 + b_{22} \cdot y_2 + b_{23} \cdot p}{b_{31} \cdot x_2 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot p}
 \end{aligned} \right\} \text{fotogramma destro} \quad (6)$$

Queste relazioni sono note come **equazioni di collinearità**; esse possono essere utilizzate nella determinazione delle coordinate assolute incognite ( $X_A$ ;  $Y_A$ ;  $Z_A$ ) di un generico punto  $A$  del terreno (**restituzione**) avendo a disposizione due fotogrammi **orientati**.

In questo caso, in effetti, saranno noti:

- distanza principale:

$$p \quad \left. \begin{array}{l} \text{orientamento} \\ \text{interno} \end{array} \right\}$$

- coordinate dei punti di presa:

$$\begin{array}{l} (X_{O1}; Y_{O1}; Z_{O1}) \\ (X_{O2}; Y_{O2}; Z_{O2}) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{orientamento} \\ \text{esterno} \end{array} \right\}$$

- assetto angolare delle camere (quindi i coefficienti  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ ):

$$\begin{array}{l} (\omega_1; \varphi_1; \kappa_1) \\ (\omega_2; \varphi_2; \kappa_2) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{orientamento} \\ \text{esterno} \end{array} \right\}$$

- coordinate dei punti immagine:

$$\begin{array}{l} (x_1; y_1) \\ (x_2; y_2) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{misure sui} \\ \text{fotogrammi} \end{array} \right\}$$

Le (5) e le (6) costituiscono un sistema di **quattro equazioni** nelle tre incognite, che, quindi, sono **determinabili** con una equazione sovrabbondante che ne consente un calcolo mediato.

## ■ I parametri di orientamento esterno dei fotogrammi

Le **equazioni di collinearità** non sono utilizzate solo nella **restituzione**, per la determinazione delle coordinate ( $X_A$ ;  $Y_A$ ;  $Z_A$ ) dei punti del terreno, ma vengono utilizzate anche nella fase di **orientamento** dei fotogrammi.

In effetti le equazioni (5) e (6) contengono i **12 parametri** di orientamento esterno [( $X_{O1}$ ;  $Y_{O1}$ ;  $Z_{O1}$ ); ( $X_{O2}$ ;  $Y_{O2}$ ;  $Z_{O2}$ ); ( $\omega_1$ ;  $\varphi_1$ ;  $\kappa_1$ ); ( $\omega_2$ ;  $\varphi_2$ ;  $\kappa_2$ )] che devono essere determinati in via preliminare.

## FAQ

► **Le equazioni di collinearità vengono usate solo nella fase di restituzione?**

No. Esse, infatti, contengono i 12 parametri di orientamento esterno che possono essere ricavati scrivendo le quattro equazioni di collinearità relative ad almeno tre punti di appoggio di posizione nota.

La determinazione contemporanea di questi parametri di *orientamento esterno* (che in precedenza si è visto determinare nelle due fasi di orientamento *relativo* e *assoluto*) può essere effettuata in un'unica fase utilizzando le stesse equazioni di collinearità in cui, tuttavia, le incognite non sono più le coordinate  $(X_A; Y_A; Z_A)$ , ma i 12 parametri di *orientamento esterno*, mentre gli elementi noti (oltre a  $p$  e alle coordinate lastra  $x_1; y_1$  e  $x_2; y_2$ ) sono le **coordinate assolute** di un certo numero di punti noti: i **punti di appoggio**.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che **ogni punto** genera **2 equazioni di collinearità** per fotogramma, quindi per ogni coppia di fotogrammi si hanno **4 equazioni**.

Pertanto, se sul terreno conosciamo la posizione di **tre punti di appoggio**  $P_1, P_2, P_3$  (riconoscibili in entrambi i fotogrammi), per ciascuno di essi, attraverso le corrispondenti coordinate assolute  $(X_{P_1}; Y_{P_1}; Z_{P_1}), (X_{P_2}; Y_{P_2}; Z_{P_2}), (X_{P_3}; Y_{P_3}; Z_{P_3})$ , disporremo delle **12** ( $4 \times 3$ ) **equazioni** necessarie alla determinazione dei 12 parametri di orientamento esterno.

In definitiva, disponendo di **due fotogrammi** sui quali è registrata una zona di terreno nell'ambito della quale siano state determinate le coordinate, nel sistema assoluto, di almeno **tre punti** del terreno (punti di appoggio), è possibile determinare, mediante le equazioni di collinearità, prima i 12 parametri di *orientamento esterno* (contemporaneamente) e successivamente le *coordinate assolute* di qualsiasi punto del terreno, previa la misura, sui due fotogrammi, delle coordinate lastra dei punti omologhi.

La conoscenza sul terreno di un **numero maggiore** (di tre) di *punti di appoggio* consente di calcolare le dodici incognite mediandole tra diverse determinazioni, quindi aumentandone la precisione.

## 8. Restituzione

La restituzione è l'insieme delle operazioni *ottico-meccaniche* o *analitiche* che consentono di passare dal *modello stereoscopico* dell'oggetto fotografato alla **rap-presentazione grafica** (carta topografica, disegni ecc.) o **numerica** (file di coordinate).

La **restituzione** deve essere preceduta dalle due fasi di orientamento che, come sappiamo, sono:

- *orientamento interno*;
- *orientamento esterno*.

Solo dopo aver orientato i fotogrammi è possibile eseguire la **restituzione**, che consiste nelle **misure** effettuate sui fotogrammi (coordinate lastra) in grado di produrre come esito finale un *disegno*, una *carta topografica*, un *file numerico* di coordinate o una *immagine* orto-proiettata.

Sia le operazioni di *orientamento* sia quelle di *restituzione* avvengono utilizzando un apposito strumento, detto **restitutore** fotogrammetrico. In passato essi erano di tipo **analogico**, caratterizzati da costi elevati, forti ingombri e pesi cospicui. Attualmente vengono utilizzati restitutori di tipo **analitico**, basati sulle capacità di calcolo dei computer.

### ■ Restitutori analogici

Sono strumenti che adottano un principio di funzionamento che **riproduce** l'evento della *presa* a cui, pertanto, è **analogo**. In prevalenza l'*analogia* è di tipo **meccanico** (restitutori a proiezione meccanica), altre volte di tipo **ottico** (restitutori a proiezione ottica).

## FAQ

► **Per quale ragione in passato si ricorreva agli ingombranti, costosi e complicati restitutori analogici?**

Perché essi si basavano su analogie fisiche della presa senza richiedere calcoli per i quali non erano disponibili adeguati strumenti, necessari a sviluppare i sistemi di equazioni richiesti dall'impostazione analitica della restituzione fotogrammetrica.

Si tratta di strumenti provvisti di due supporti sui quali vengono collocati con precisione i **due fotogrammi** da restituire; essi corrispondono alla **camera** nelle due posizioni di presa.

Nei restitutori a proiezione meccanica (► FIGURE 20 e 21) i *raggi proiettanti*  $r_1$  e  $r_2$  vengono materializzati da due **bacchette d'acciaio** che possono ruotare attorno a un *giunto cardanico*: il baricentro del giunto materializza il **centro di proiezione** della camera da presa. Le altre due estremità convergono in un punto che corrisponde al punto di intersezione di una coppia di *raggi proiettanti*. L'esatto posizionamento delle **bacchette**, che consente alla loro intersezione di rappresentare un punto del terreno, viene effettuato dall'operatore mediante la **collimazione stereoscopica** dei fotogrammi.

Allo strumento è collegato un **piano** attrezzato sul quale viene tracciato il disegno dell'oggetto (di solito una carta topografica).

## ■ Restitutori analitici

Il restitutore **analitico**, di fatto, costituisce l'abbinamento tra uno **stereocomparatore**, un **computer** e un **plotter** (► FIGURA 22) a cui sono riservate le seguenti funzioni:

- **stereocomparatore**: dispositivo che consente la **misura**, in *stereoscopia*, delle **coordinate interne** ( $x$ ;  $y$ ) dei punti omologhi dell'oggetto ripreso sui fotogrammi;
- **computer**: su di esso risiede il software di gestione del restitutore; ha il compito di sviluppare i *laboriosi calcoli* (rototraslazioni, sistemi di equazioni di collinearità) che consentono di determinare la corrispondenza delle *coordinate lastra* con le corrispondenti **coordinate assolute** ( $X$ ;  $Y$ ;  $Z$ ), per ogni punto dell'oggetto ripreso, e memorizzarne i risultati in un archivio elettronico (*database*);
- **plotter**: ha la funzione di *tracciare* su carta il risultato della restituzione.

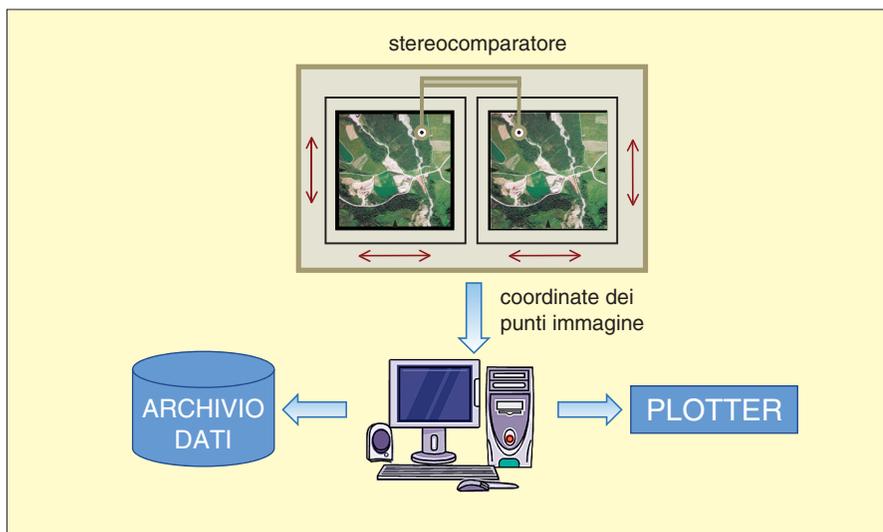
Il computer, inoltre, **assiste** e guida costantemente l'operatore, in tutte le fasi in cui si sviluppa l'operazione di restituzione.

I restitutori *analitici* (► FIGURE 23 e 24) sono decisamente **meno ingombranti** di quelli *analogici*, sono in grado di effettuare le operazioni di restituzione con una **maggior precisione** e non sono vincolati dai parametri della camera utilizzata nella presa (distanza principale, assetto ecc.), in quanto i loro valori vengono inseriti nel calcolatore come **valori numerici**, dunque non devono essere imposti con in-

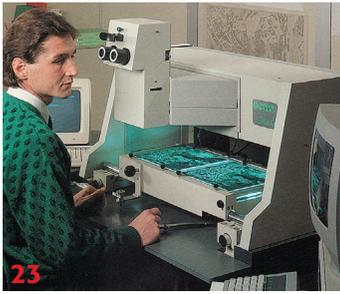


**FIGURA 20** Restitutore analogico Wild A-10.

**FIGURA 21** Restitutore analogico Kern PG3.



**FIGURA 22** Schema funzionale di un restitutore analitico.



**FIGURA 23** Restitutore analitico Siscam Galileo Digicart 40.

**FIGURA 24** Restitutore analitico Zeiss P33.

terventi manuali su **congegni meccanici** dello strumento, come avveniva nei *restitutori analogici*.

Come sappiamo, la generazione del *modello* dell'oggetto ripreso a partire da due fotogrammi si raggiunge attraverso le operazioni di *orientamento interno ed esterno*. Ebbene, anche queste operazioni sono decisamente più semplici e rapide nei restitutori *analitici*, rispetto a quelli *analogici*, essendo anch'esse effettuate in **forma numerica** dal calcolatore. Inoltre, con i restitutori *analitici* è possibile **compensare** con maggior affidabilità gli errori connessi a tutte le fasi del processo fotogrammetrico.

### ■ Lo stereocomparatore

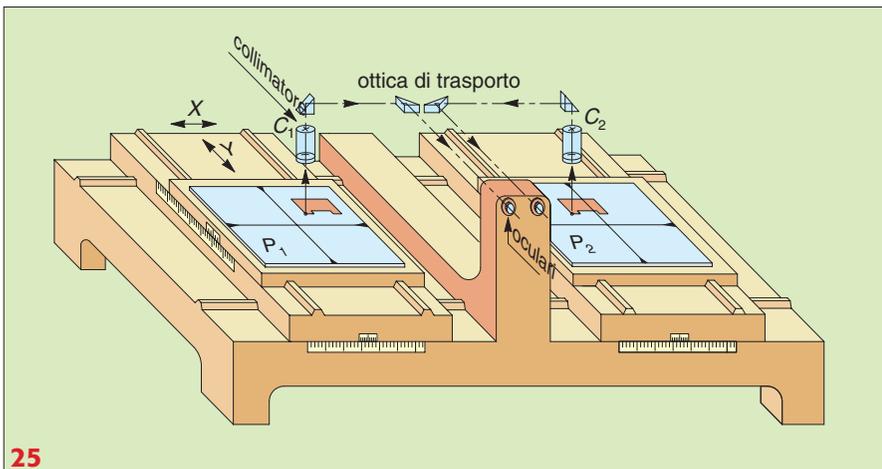
Tra i componenti del *restitutore analitico*, lo **stereocomparatore** merita un approfondimento. Concepito nel 1901 da **Carl Pulfrich**, consentiva di **collimare** e **misurare**, in *stereoscopia*, la posizione dei punti immagine di un oggetto registrato sui fotogrammi. All'epoca, la successiva restituzione con cui si determinavano le coordinate assolute dei punti sul terreno doveva essere eseguita **manualmente**, con lunghissimi e frustranti calcoli numerici.

Nello *stereocomparatore* i fotogrammi vengono montati su due **portastre** (o **carrelli**) che possono subire spostamenti su **slitte** secondo gli assi *X* e *Y* del sistema strumentale (► **FIGURA 25**). Gli spostamenti dei carrelli sulle slitte in passato avvenivano a mezzo di *volantini* che comandavano delle *viti micrometriche*; oggi sono comandati da **servomotori**. In ogni caso la loro entità viene misurata da apposite scale, mentre due collimatori  $C_1$  e  $C_2$  consentono di eseguire le **collimazioni stereoscopiche** dei vari punti. Esiste poi un'opportuna **ottica di trasporto** che consente di portare le immagini in visione binoculare e in posizione che sia comoda per l'osservatore. Nei moderni stereocomparatori (► **FIGURA 26**) la misura delle coordinate strumentali  $SX$  e  $SY$  può avvenire con la precisione di  $1 \mu$  (1 micron, cioè 1 millesimo di mm). Le stesse **coordinate strumentali**  $SX$  e  $SY$  dei punti collimati sui fotogrammi vengono poi inviate al *computer del restitutore* il cui software le trasformerà, con una **rototraslazione piana**, nelle **coordinate lastra**  $x, y$  (da utilizzare poi nelle fasi di orientamento e restituzione) in base alle seguenti formule:

$$x = (SX - SX_p) \cos \alpha - (SY - SY_p) \sin \alpha$$

$$y = (SX - SX_p) \sin \alpha + (SY - SY_p) \cos \alpha$$

In esse  $SX_p$  e  $SY_p$  sono le coordinate del punto principale  $P$  del fotogramma espresse nel sistema **strumentale**, mentre  $\alpha$  è l'angolo formato tra gli assi dei due sistemi di riferimento (v. paragrafo 2 e ► **FIGURA 10**); tali parametri sono determinati nel contesto dell'operazione di *orientamento interno* di ciascun fotogramma.



**FIGURA 25** Schema funzionale di uno stereocomparatore.

**FIGURA 26** Un moderno stereocomparatore.

## ■ Operazioni di restituzione

Per concretizzare la fase di *restituzione*, nella quale si ottiene il risultato finale del rilievo (la rappresentazione grafica o numerica dell'oggetto), attraverso un **insieme organico di punti** dei quali si collimano le immagini sui fotogrammi, l'operatore deve attivare i passaggi che nel seguito sono brevemente descritti.

**1. Orientamento interno.** In primo luogo i due fotogrammi consecutivi (che generano il *modello stereoscopico*) devono essere montati sui **portalastr**e dello stereocomparatore senza preoccuparsi del loro preciso orientamento. Di seguito viene effettuata l'operazione di *orientamento interno* dei due fotogrammi guidata dal software di gestione del sistema; in sostanza l'operatore è chiamato a **collimare** le **marc**he **fiduciali** sui due fotogrammi (almeno tre per ogni fotogramma) e a inserire i valori delle *corrispondenti coordinate* prelevabili dal **certificato di collimazione** della camera. Ciò consente al software di determinare i tre parametri ( $SX_p$ ,  $SY_p$  e  $\alpha$ ) necessari a trasformare le **coordinate carrello**  $SX$ ,  $SY$  (nel sistema di *riferimento strumentale*) in **coordinate lastra**  $x$ ,  $y$  (nel sistema di *riferimento interno*) della camera da presa.

Dopo questa operazione, ogni volta che l'operatore **collima un punto** nel modello stereoscopico, il computer del restitutore acquisisce le **coordinate lastra** di quel punto, sia dal fotogramma sul carrello di sinistra ( $x_1$ ;  $y_1$ ), che da quello sul carrello di destra ( $x_2$ ;  $y_2$ ), da utilizzare nelle fasi successive.

**2. Orientamento esterno.** Successivamente l'operatore deve eseguire l'operazione di **orientamento esterno** contemporaneamente per entrambi i fotogrammi, o in due fasi separate: *relativo* e *assoluto*. In questa fase è richiesta la collimazione sul modello stereoscopico dei **punti di appoggio** (di posizione assoluta  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  nota) determinandone le coordinate lastra ( $x$ ;  $y$ ) sui due fotogrammi; ciò consente al software di sviluppare il sistema di **equazioni di collinearità** ottenendo i 12 parametri di orientamento esterno.

**3. Restituzione.** Ultimate le precedenti operazioni, l'operatore inizia la fase vera e propria di *restituzione*. In questa fase sono **collimati** i punti che vengono giudicati necessari a concorrere alla ricostruzione dell'oggetto ripreso. Per ciascuna collimazione il software di gestione del sistema **trasforma** le coordinate lastra ( $x$ ;  $y$ ) in coordinate assolute ( $X$ ;  $Y$ ;  $Z$ ) del punto collimato, utilizzando le **equazioni di collinearità** in cui compariranno i parametri di orientamento interno ed esterno calcolati nelle precedenti fasi. Lo stesso software di gestione, poi, è anche in grado di trasformare ulteriormente le coordinate assolute ( $X$ ;  $Y$ ;  $Z$ ) sia in **coordinate geografiche** ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ), sia in **coordinate cartografiche** ( $E$ ;  $N$ ;  $Q$ ).

**4. Controllo e memorizzazione.** Via via che l'operatore esegue la fase di restituzione, il software del sistema **memorizza** le coordinate dei punti in appositi *archivi informatici* (**file**) e visualizza gli stessi punti sullo schermo, in modo da consentire all'operatore un pronto **controllo** del lavoro che sta eseguendo.

## 9. Restituzione monoscopica (raddrizzamento)

Si è più volte detto, nell'ambito di questo modulo, che **non è possibile** riprodurre un oggetto tridimensionale (terreno, edificio ecc.) con **un solo fotogramma**, in quanto un'immagine bidimensionale (piana) non permette di determinare in modo univoco la posizione dei punti dell'oggetto, non essendo possibile realizzare l'**intersezione** dei raggi omologhi.

### FAQ

► **Le operazioni di orientamento e restituzione effettuate con un restitutore analitico sono guidate dal software di sistema?**

Certo, ogni passaggio della procedura è scandito dal programma informatico che gestisce il restitutore, sollevando il tecnico operatore da numerose competenze che erano irrinunciabili per un operatore di restitutore analogico.

### FAQ

► **Quando è possibile la restituzione con un solo fotogramma?**

Quando l'oggetto ripreso è piano o può essere considerato tale.

**FAQ**
**► Che cos'è l'ortoproiezione?**

È una tecnica di restituzione con un solo fotogramma che consiste nel suddividere il terreno da rappresentare in tante piccole strisce perpendicolari alla linea di volo che vengono considerate piane e orizzontali ma poste a quote diverse.

In ambito analitico, la precedente valutazione geometrica corrisponde alla conoscenza delle **equazioni di collinearità** di un solo fotogramma, che sono **due** (per esempio, le precedenti (5) del paragrafo 7) e che contengono **tre incognite**, dunque **non determinabili** se non con l'aggiunta delle ulteriori due equazioni fornite dal secondo fotogramma necessario alla restituzione dell'oggetto tridimensionale.

Tuttavia esiste un'eccezione a quanto esposto in precedenza; essa è costituita dal caso in cui l'oggetto ripreso sia **piano** (o possa essere considerato tale), come il prospetto di un fabbricato senza aggetti e rientranze, o un terreno pianeggiante. Questo requisito analiticamente si traduce nel considerare **nulle** (o costanti) **tutte le coordinate Z** dei punti dell'oggetto, dunque con una diminuzione delle incognite da tre a due ( $X; Y$ ), che pertanto possono essere calcolate con le **due equazioni di collinearità** fornite **da un solo fotogramma**.

In realtà è difficile che un oggetto sia perfettamente piano, tuttavia quanto detto viene ritenuto vero anche in presenza di **sporgenze** o **aggetti** nella direzione  $Z$  (ortogonale all'oggetto piano) a patto che le loro dimensioni siano **minori** di **1/100** della distanza di presa (per esempio, nel caso della facciata di un edificio ripreso da 20 m, le sue asperità non devono superare i 20 cm).

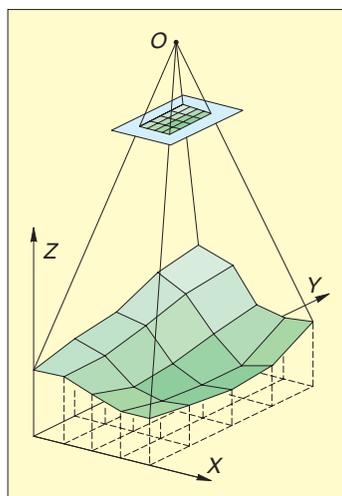
La restituzione monoscopica prevede essenzialmente una *trasformazione di coordinate*, con la quale si ottiene una **ulteriore immagine** priva delle *deformazioni prospettiche* presenti nel fotogramma originario. Questa immagine viene anche **scalata** per consentire di ottenere da essa le grandezze desiderate (*immagine metrica*).

Il risultato della restituzione di un **oggetto piano** con *un solo fotogramma*, dunque, è un'immagine che viene detta **raddrizzamento** (o **fotopiano**).

## ■ Ortoproiezione

Si tratta di un particolare tipo di raddrizzamento riferito a una porzione di terreno **non piano**, registrato nei fotogrammi delle prese aeree. Si è visto nel paragrafo precedente che il **fotopiano** può essere ottenuto solo da *oggetti piani*, dunque da **terreni pianeggianti**; per terreni accidentati, infatti, non è possibile stabilire un'attendibile relazione prospettica tra fotogramma e terreno. Esiste, tuttavia, una tecnica, detta di **raddrizzamento differenziato**, che consente di utilizzare **un solo fotogramma** anche quando il terreno non è né piano né orizzontale; questo tipo di raddrizzamento viene chiamato **ortoproiezione** (o **ortofoto**).

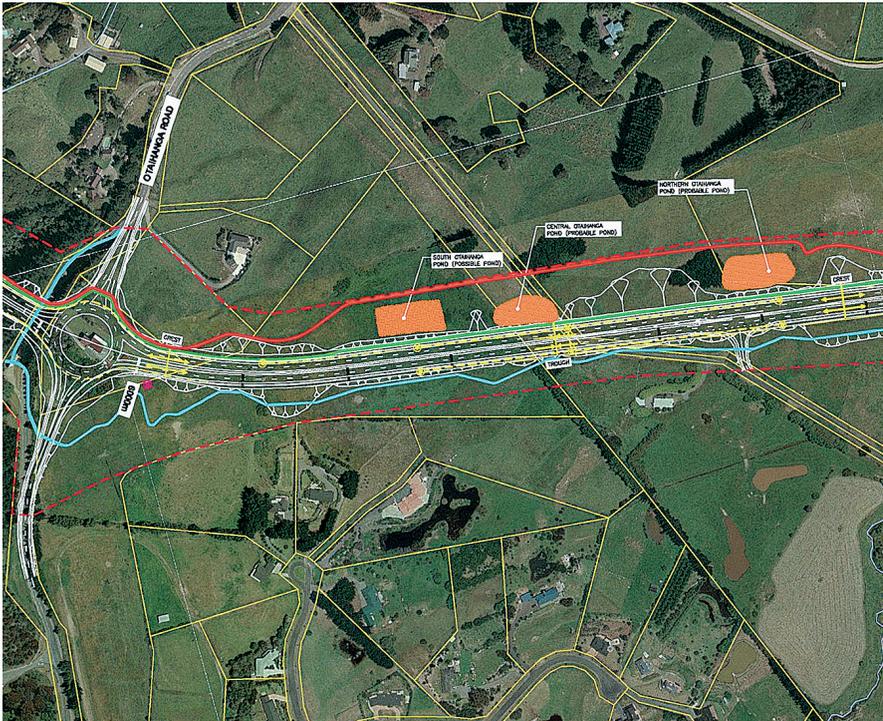
Con questa tecnica si considera il terreno, rappresentato sul fotogramma, scomposto in tante **piccolissime aree** appartenenti a un *grigliato ideale* regolare (► FIGURA 27). La limitatezza di queste porzioni di terreno permette di considerarle, per approssimazione, **piane** e **orizzontali**, anche se a *quote diverse*; pertanto possono essere *raddrizzate*, cambiando per ciascuna di esse i parametri del raddrizzamento.



**FIGURA 27** Principio di realizzazione del raddrizzamento differenziale. Il terreno viene scomposto in porzioni regolari, attraverso una griglia ideale. Queste porzioni vengono poi raddrizzate separatamente.

Si tratta, pertanto, di un **raddrizzamento differenziale** per ciascuna porzione di terreno rappresentata nel fotogramma, dalle quali si ottengono tanti piccoli *fotopiani* che verranno poi collegati a **mosaico** in modo da formare l'immagine raddrizzata del terreno.

L'operazione di *raddrizzamento differenziale* viene eseguita in strumenti detti **ortorestitutori** (analogici o analitici) e richiede:



**FIGURA 28** Porzione di una ortoproiezione utilizzata nell'ambito del progetto di un tratto di strada. Oltre agli elementi grafici della strada in progetto, alla ortoproiezione sono state aggiunte (in giallo) le linee di confine di proprietà.

- la conoscenza delle **quote** dei punti corrispondenti ai nodi della griglia ideale in cui è stato suddiviso il terreno; ciò consente di mantenere costante la **scala** delle singole porzioni (ricordiamo che differenze di quota del terreno provocano variazioni di scala sul fotogramma);
- la determinazione dell'*orientamento esterno* del fotogramma.

Il modo più semplice, e più frequente, per ottenere l'andamento altimetrico della zona di terreno è quello di utilizzare la **cartografia** esistente, purché di adeguata scala e attendibilità (le carte CTR sono senza dubbio adatte allo scopo); le quote vengono ottenute **digitalizzando le curve di livello** della carta.

L'*ortoproiezione* è una immagine *scalata* sulla quale è possibile dedurre *informazioni metriche* allo stesso modo di quelle che si ottengono da una tradizionale carta topografica. Queste informazioni sono **meno precise** di quelle ottenute dalle carte tradizionali realizzate per restituzione stereoscopica (analogica o analitica), tuttavia sono anche **meno costose** da realizzare e contengono una **ricchezza di informazioni** sul terreno rilevato che, di norma, non possono essere presenti nelle carte tradizionali.

Le *ortofoto* spesso vengono corredate di **elementi grafici** aggiuntivi come le *curve di livello*, le *linee di confine* delle proprietà o *elementi progettuali*, come nel caso della progettazione stradale (► FIGURA 28).

# Riassumendo



I **parametri dell'orientamento interno** dei fotogrammi sono i seguenti:

- coordinate del *punto principale*  $P$  nel sistema lastra:  $x_P$  e  $y_P$ ;
- *distanza principale*:  $p$ ;
- curva di *distorsione* dell'obiettivo.

Tutti questi parametri sono contenuti nel *certificato di calibrazione* della camera con precisioni almeno al *centesimo* di mm ( $\pm 0,01$  mm).

**Distorsione.** A causa del mancato parallelismo con il raggio incidente, il raggio rifratto emerge dall'obiettivo *inclinato* rispetto alla direzione teorica, provocando una *deformazione* dell'immagine che viene detta *distorsione*.

- La parte prevalente della distorsione di un obiettivo è la componente *radiale*, che deforma l'immagine spostando un suo punto  $A$  nella posizione  $A'$  lungo la direzione radiale.
- L'andamento della distorsione lungo una diagonale viene rappresentata da un diagramma detto *curva di distorsione*.

**Riduzione della distorsione.** Per ridurre gli effetti della distorsione si *trasla* la lastra di una quantità  $\Delta p$  di *pochi millesimi* di mm lungo l'asse ottico. In questo modo si *annulla* la distorsione solo nei punti che si trovano alla *stessa distanza dal centro*. Negli altri punti dell'immagine la *distorsione* non è nulla, ma è comunque *minore* di quella che si riscontra senza lo spostamento della lastra.

**Orientamento interno.** È una operazione che materialmente consiste nella collimazione delle *marche fiduciali* dei fotogrammi montati su appositi strumenti (*stereocomparatori*), e nell'immissione, nel software, dei parametri precedenti, nell'ambito delle operazioni preliminari alla *restituzione*.

**Coordinate strumentali.** Nello *stereocomparatore* vengono misurate le *coordinate strumentali*  $SX$ ,  $SY$  dei punti collimati in ciascun fotogramma, fornite dai movimenti ortogonali dei carrelli che spostano i piatti portalastra. Successivamente un computer trasforma (con una *rototraslazione piana*) queste coordinate strumentali in coordinate lastra  $x$ ,  $y$  necessarie all'*orientamento* e alla *restituzione*.

**Orientamento esterno.** Operazione con cui i due fotogrammi vengono ripristinati nella stessa posizione spaziale che avevano nella camera all'atto della presa. Essa consiste nella determinazione, per ciascun fotogramma, dei parametri di movimento di un corpo rigido nello spazio, cioè *3 traslazioni* e *3 rotazioni*. Questi 6 parametri possono essere:

- le 3 coordinate  $(X_O, Y_O, Z_O)$  del centro di presa  $O$ ;
- i 3 angoli  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$  di assetto della camera.

Dato che per ricostruire ciascun *modello stereoscopico* sono necessari due fotogrammi consecutivi, per il loro *orientamento esterno* occorre determinare complessivamente  $6 + 6 = 12$  parametri incogniti.

I **parametri di orientamento esterno** vengono determinati nei *restitutori* in base alle misure delle coordinate lastra  $x$ ,  $y$ , di alcuni punti immagine sui fotogrammi e in

base a coordinate note di *punti di appoggio* sul terreno, anch'essi visibili sui due fotogrammi. Dal punto di vista analitico questa fase richiede la risoluzione di *sistemi di equazioni (di collinearità)*. Operativamente l'*orientamento esterno* può essere eseguito con le seguenti diverse modalità:

- contemporaneo di due fotogrammi con un'unica operazione;
- contemporaneo di due fotogrammi in due fasi;
- orientamento *indipendente* dei due fotogrammi.

**Nel secondo caso** la procedura di *orientamento esterno* prevede le seguenti due fasi distinte:

- *orientamento relativo*: determinazione dei 5 parametri che definiscono la posizione relativa del secondo fotogramma rispetto al primo fotogramma;
- *orientamento assoluto*: determinazione dei rimanenti 7 parametri necessari a definire la corretta posizione nello spazio dell'oggetto rilevato.

**Orientamento relativo** (5 parametri:  $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ ). Viene adottato un sistema di riferimento temporaneo  $X'Y'Z'$  solidale con il *primo fotogramma*, la cui configurazione spaziale annulla 7 dei 12 parametri dell'*orientamento esterno*, lasciandone 5 da determinare. Esso può essere:

- *asimmetrico*: si calcolano solo i parametri di *orientamento relativo* del secondo fotogramma rispetto al primo considerato *fermo*. Questa soluzione trovava impiego prevalente nei restitutori *analogici*;
- *simmetrico*: in questo caso *entrambi* i fotogrammi possono subire movimenti per raggiungere il corretto posizionamento relativo. L'*orientamento simmetrico* trova impiego prevalente negli attuali restitutori *analitici*.

**Modello stereoscopico.** A seguito dell'*orientamento relativo*, i due fotogrammi consecutivi si troveranno idealmente in una indeterminata posizione spaziale legata al sistema temporaneo  $X'Y'Z'$ , e le intersezioni dei raggi proiettanti daranno luogo alla *ricostruzione* di un oggetto, *simile* a quello reale (chiamato *modello*), ma in una *posizione generica* dello spazio e anche in una *scala arbitraria* (sarà poi compito dell'*orientamento assoluto* correggere tale situazione).

**Per ottenere i 5 parametri dell'orientamento relativo** il restitutore utilizza le condizioni di *intersezione* di almeno 5 coppie di *raggi proiettanti* relativi a 5 coppie di *punti omologhi*, ben identificabili e collimabili sul *modello stereoscopico* generato dai due fotogrammi. Analiticamente ciò si traduce in un sistema di equazioni dette di *collinearità*.

**Orientamento assoluto** (7 parametri:  $m, X_O, Y_O, Z_O, \omega, \varphi, \kappa$ ). Il *modello stereoscopico* ottenuto nell'*orientamento relativo* viene trasformato convertendolo alla *scala desiderata* (coefficiente  $m$ ) e imponendogli lo stesso *orientamento*

dell'oggetto ripreso. Per determinare i 7 parametri è necessaria la conoscenza della *posizione* ( $XYZ$ ) di un certo numero di punti appartenenti all'oggetto, e identificabili sui fotogrammi, detti di *punti di appoggio*.

**La posizione dei punti di appoggio** a terra viene determinata con tradizionali *operazioni topografiche*, con il *GPS* o con altre procedure (*triangolazione aerea*). In relazione alla natura, questi punti possono essere classificati come:

- *naturali*: sono selezionati tra i manufatti preesistenti sul terreno e devono essere ben riconoscibili sui fotogrammi;
- *artificiali*: sono realizzati per l'occasione; devono poi essere *segnalati* in modo opportuno.

**Per ottenere i 7 parametri incogniti dell'orientamento assoluto** occorre impostare almeno 7 equazioni di *rototraslazione* che mettano in relazione le coordinate dei punti nei due sistemi *assoluto* ( $XYZ$ ) e *provvisorio* ( $X'Y'Z'$ ), nelle quali le uniche incognite siano i 7 parametri  $m, X_O, Y_O, Z_O, \omega, \varphi, \kappa$ . Considerando che ogni *punto di appoggio* permette di scrivere *tre equazioni* (una per ciascuna delle tre coordinate spaziali), teoricamente sono sufficienti le coordinate note di almeno 3 *punti di appoggio non allineati*. In realtà viene fatto riferimento a un numero maggiore di punti di appoggio per ottenere i 7 parametri in forma mediata, dunque con maggior affidabilità.

**Triangolazione aerea.** Il rilievo topografico tradizionale o *GPS* dei punti di appoggio è molto lungo e oneroso, pertanto si sono ricercate soluzioni che limitassero questo problema. In effetti è disponibile una tecnica, detta *triangolazione aerea*, che consente di ottenere la parte prevalente dei *punti di appoggio dagli stessi fotogrammi* con procedure analitiche. Essa consente di *collegare* tutti i modelli stereoscopici generati da coppie consecutive di fotogrammi considerandoli come un unico *blocco*, per l'*orientamento* del quale sono necessari *pochi punti* di appoggio a terra (mediamente il 10-20% rispetto alle tecniche tradizionali). Successivamente, per ciascun modello del blocco è possibile individuare un certo numero di punti di appoggio e «*ricavarne*» *analiticamente* le corrispondenti coordinate assolute.

**Sistema di riferimento interno.** Nell'ambito della *fotogrammetria analitica*, è necessario che anche la posizione dei punti delle immagini sui fotogrammi sia espressa attraverso *coordinate tridimensionali*, rispetto al sistema di *riferimento interno* della camera così definito:

- origine coincidente con il centro di presa  $O$ ;
- asse  $z$  coincidente con l'asse della camera;
- assi  $x$  e  $y$  *paralleli* alle congiungenti delle *marche fiduciali* del fotogramma ( $x$  direzione di volo).

**Fotogrammetria analitica.** In questo tipo di restituzione la posizione del generico punto  $A$  dell'oggetto ripreso viene ottenuta calcolando le coordinate dell'*intersezione*

nello spazio dei due raggi proiettanti  $r_1$  e  $r_2$  attraverso la soluzione di un sistema di equazioni dette di *collinearità*. Esse esprimono la circostanza che, per ogni fotogramma, il centro di presa  $O$ , il punto oggetto  $A$  e il punto immagine  $A_1$  sul fotogramma sono allineati sullo stesso raggio proiettante  $r$ . Esse governano le seguenti tre fasi del processo fotogrammetrico: *presa, orientamento e restituzione*.

**Le equazioni di collinearità** si ottengono dalle equazioni di una retta nello spazio che definisca l'allineamento dei tre punti citati in precedenza ( $O, A_1, A$ ) e la trasformazione spaziale (rototraslazione) tra i due seguenti sistemi di riferimento:

- il sistema assoluto XYZ a cui andranno riferiti i punti dell'oggetto da rilevare;
- il sistema interno xyz del fotogramma.

**Per ogni fotogramma** è possibile scrivere 2 equazioni di collinearità, pertanto per ogni modello stereoscopico generato da una coppia di fotogrammi si possono scrivere le seguenti 4 equazioni di collinearità:

$$X_A = X_{O1} + (Z_A - Z_{O1}) \cdot \frac{a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot y_1 + a_{13} \cdot p}{a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot y_1 + a_{33} \cdot p}$$

$$Y_A = Y_{O1} + (Z_A - Z_{O1}) \cdot \frac{a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot y_1 + a_{23} \cdot p}{a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot y_1 + a_{33} \cdot p}$$

$$X_A = X_{O2} + (Z_A - Z_{O2}) \cdot \frac{b_{11} \cdot x_2 + b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot p}{b_{31} \cdot x_2 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot p}$$

$$Y_A = Y_{O2} + (Z_A - Z_{O2}) \cdot \frac{b_{21} \cdot x_2 + b_{22} \cdot y_2 + b_{23} \cdot p}{b_{31} \cdot x_2 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot p}$$

Esse permettono di determinare le coordinate assolute incognite ( $X_A; Y_A; Z_A$ ) di un generico punto  $A$  del terreno (*restituzione*), avendo a disposizione due fotogrammi orientati. In esse i simboli hanno il seguente significato:

- distanza principale:  $p$
- coordinate dei punti di presa:  
 $(X_{O1}; Y_{O1}; Z_{O1}); (X_{O2}; Y_{O2}; Z_{O2})$
- assetto angolare delle camere:  
 $(\omega_1; \varphi_1; \kappa_1); (\omega_2; \varphi_2; \kappa_2)$
- coordinate dei punti immagine:  
 $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$

**Le equazioni di collinearità** non sono utilizzate solo nella *restituzione*, per la determinazione delle coordinate ( $X_A; Y_A; Z_A$ ) dei punti del terreno, ma vengono utilizzate anche nella fase di *orientamento esterno* dei fotogrammi in un'unica fase. In effetti esse contengono i 12 parametri di orientamento esterno

$$(X_{O1}; Y_{O1}; Z_{O1}); (X_{O2}; Y_{O2}; Z_{O2}) \quad (\omega_1; \varphi_1; \kappa_1); (\omega_2; \varphi_2; \kappa_2)$$

che devono essere determinati in via preliminare. In effetti, se sul terreno conosciamo la posizione di tre punti di appoggio  $P_1, P_2, P_3$ , riconoscibili in entrambi i fotogrammi, per ciascuno di essi, attraverso le corrispondenti coordinate assolute

$$(X_{P1}; Y_{P1}; Z_{P1}), (X_{P2}; Y_{P2}; Z_{P2}), (X_{P3}; Y_{P3}; Z_{P3})$$

disporremo di 12 ( $4 \times 3$ ) equazioni necessarie alla determinazione dei 12 parametri di orientamento esterno.

**Restitutori analogici.** Sono strumenti che adottano un principio di funzionamento che riproduce l'evento della presa a cui, pertanto, è analogo. In prevalenza l'analogia è di tipo meccanico, altre volte di tipo ottico.

**Restitutori analitici.** Di fatto costituiscono l'abbinamento tra uno stereocomparatore, un computer e un plotter, a cui sono riservate le seguenti funzioni:

- stereocomparatore: dispositivo che consente la misura, in stereoscopia, delle coordinate interne ( $x, y$ ) dei punti immagine;
- computer: su di esso risiede il software di gestione del restitutore; ha il compito di sviluppare i laboriosi calcoli (rototraslazioni, sistemi di equazioni di collinearità) previsti;
- plotter: ha la funzione di tracciare su carta il risultato della restituzione.

Nei restitutori, analitici o analogici, vengono effettuate sia le operazioni di orientamento interno ed esterno dei fotogrammi, sia le operazioni di restituzione.

**Restituzione monoscopica (raddrizzamento).** In generale non è possibile riprodurre un oggetto tridimensionale (terreno, edificio ecc.) con un solo fotogramma, in quanto un'immagine bidimensionale non permette di determinare in modo univoco la posizione dei punti dell'oggetto, non essendo possibile realizzare l'intersezione dei raggi omologhi.

Tuttavia, ciò è possibile quando l'oggetto ripreso è piano (o possa essere considerato tale), come il prospetto di un fabbricato, o un terreno pianeggiante. Questo requisito analiticamente si traduce nel considerare nulle (o costanti) tutte le coordinate  $Z$  dei punti dell'oggetto, dunque con una diminuzione delle incognite da tre a due ( $X, Y$ ), che pertanto possono essere calcolate con le due equazioni di collinearità fornite da un solo fotogramma.

**Fotopiano.** La restituzione monoscopica prevede essenzialmente una trasformazione di coordinate, con la quale si ottiene una ulteriore immagine priva delle deformazioni prospettiche presenti nel fotogramma originario. Essa viene anche scalata per consentire di ottenere da essa le grandezze desiderate (immagine metrica).

# Autovalutazione

## A. Verifica delle conoscenze

### QUESITI VERO/FALSO

- |   | V                        | F                        |  |   |
|---|--------------------------|--------------------------|--|---|
| <b>1</b> L'orientamento dei fotogrammi è la fase terminale del processo fotogrammetrico             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>18</b> I parametri dell'orientamento assoluto di una coppia di fotogrammi sono 5  | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>2</b> L'orientamento relativo è una fase dell'orientamento interno                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>19</b> L'orientamento simmetrico è un tipo di orientamento relativo   | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>3</b> L'orientamento dei fotogrammi non può essere eseguito nei restitutori                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>20</b> Nelle fasi di orientamento e restituzione vengono utilizzati i fotogrammi negativi   | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>4</b> I parametri di orientamento interno vengono forniti dal costruttore della camera           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>21</b> L'errore medio di misura in uno stereocomparatore moderno è $\pm 0,1$ mm (decimo di mm)  | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>5</b> La distorsione è un difetto di planarità della lastra                                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>22</b> La restituzione con un solo fotogramma è possibile solo se l'oggetto è piano e verticale   | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>6</b> La legge di variazione della distorsione può essere rappresentata con un diagramma         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>23</b> Il risultato finale del «raddrizzamento» è una immagine  | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>7</b> Gli stiramenti della pellicola sono un tipo di distorsione                                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>24</b> Fotopiano, raddrizzamento differenziale e ortoproiezione sono la medesima cosa   | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| <b>8</b> La componente radiale della distorsione è la sua parte preponderante                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>QUESITI A RISPOSTA SINGOLA</b>  |   |
| <b>9</b> La distorsione può essere minimizzata trasladando la lastra                                | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>25</b> Elencare le tipologie di orientamento a cui devono essere sottoposti i fotogrammi.   |   |
| <b>10</b> La curva di distorsione è un elemento dell'orientamento interno                           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>26</b> Come viene configurato il sistema di riferimento interno dei fotogrammi nell'ambito della fotogrammetria analitica?  |   |
| <b>11</b> Nell'orientamento interno è necessario collimare tutte le marche fiduciali dei fotogrammi | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>27</b> Da cosa è causata e in cosa consiste la distorsione delle immagini sui fotogrammi?   |   |
| <b>12</b> Nella restituzione analitica le coordinate lastra non vengono misurate ma calcolate       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>28</b> Per quale ragione la distorsione è tanto temibile in ambito fotogrammetrico?   |   |
| <b>13</b> Nella restituzione analogica le coordinate lastra non vengono misurate ma calcolate       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>29</b> Nelle camere metriche la distorsione viene minimizzata; descrivere l'accorgimento utilizzato.  |   |
| <b>14</b> Nella restituzione analogica il fotogramma viene «centrato» sul telaio portalastra        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>30</b> Dove è possibile prendere visione della curva di distorsione di una data camera?   |   |
| <b>15</b> I parametri dell'orientamento esterno di una coppia di fotogrammi sono 9                  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>31</b> Per quale ragione, negli stereocomparatori analitici, vengono misurate le coordinate strumentali (carrello) $SX, SY$ e non direttamente quelle lastra $x, y$ dei punti immagine? |   |
| <b>16</b> L'orientamento esterno può essere effettuato sia in una sola operazione, sia in due fasi  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>32</b> Descrivere le fasi operative dell'orientamento interno.  |   |
| <b>17</b> Il modello stereoscopico di due fotogrammi viene generato nell'orientamento assoluto      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <b>33</b> Cosa si ottiene con l'orientamento relativo di una coppia di fotogrammi?   |   |
|   |                          |                          | <b>34</b> Quali punti devono essere considerati nell'operazione pratica di orientamento relativo?  |   |
|   |                          |                          | <b>35</b> Cosa si ottiene con l'orientamento assoluto di una coppia di fotogrammi?   |   |

- 36** Quali punti devono essere considerati nell'operazione pratica di orientamento assoluto?
- 37** Quanti e quali sono i parametri di orientamento relativo? E quelli di orientamento assoluto?
- 38** Come si ottengono le equazioni di collinearità relative a una coppia di fotogrammi orientati?
- 39** In quali ambiti vengono utilizzate le equazioni di collinearità?
- 40** Descrivere le componenti e le funzioni di un restitutore analitico?
- 41** Chi fu lo studioso che, nei primi anni del '900, realizzò il primo stereocomparatore?
- 42** A quali condizioni è possibile la restituzione monoscopica (con un solo fotogramma)?
- 43** Cos'è e cosa produce l'ortoproiezione?

**QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA**

- 44** Quante fasi prevede l'orientamento interno?
- a 2                       b 3  
 c 4                       d nessuna delle precedenti
- 45** Da cosa è provocata la distorsione?
- a dalla scorretta inclinazione dei raggi incidenti  
 b dalla scorretta inclinazione dei raggi emergenti  
 c dalla mancata planarità della lastra  
 d da tutte le precedenti
- 46** Traslando la lastra è possibile annullare sul fotogramma la distorsione radiale per i punti che si trovano su
- a un quadrato               b una delle diagonali  
 c un cerchio                 d nessuna delle precedenti
- 47** Quale tipo di coordinate vengono misurate in uno stereocomparatore analitico?
- a coordinante lastra  $x, y$   
 b coordinante strumentali  $SX, SY$   
 c coordinante assolute  $X, Y$   
 d tutte le precedenti
- 48** Quali elementi *non* sono richiesti nell'orientamento interno dei fotogrammi?
- a curva di distorsione  
 b distanza principale  
 c coordinate del punto principale  
 d formato della lastra
- 49** Qual è il numero dei parametri necessari all'orientamento esterno di una coppia di fotogrammi consecutivi?
- a 9                               b 6  
 c 15                             d nessuno dei precedenti

- 50** La collimazione delle marche fiduciali dei fotogrammi è richiesta nell'ambito
- a dell'orientamento relativo  
 b dell'orientamento assoluto  
 c dell'orientamento interno  
 d nessuno dei precedenti
- 51** Il modello stereoscopico generato nell'orientamento relativo di una coppia di fotogrammi è
- a non orientato correttamente ma in scala  
 b non orientato correttamente e non in scala  
 c orientato correttamente e in scala  
 d orientato correttamente ma non in scala
- 52** Quale numero minimo teorico di punti di appoggio sull'oggetto richiede l'orientamento relativo di ciascun modello stereoscopico?
- a 3                               b 4  
 c 2                               d nessuno dei precedenti
- 53** Quale numero minimo teorico di punti di appoggio sull'oggetto richiede l'orientamento relativo di ciascun modello stereoscopico?
- a 3                               b 4  
 c 2                               d nessuno dei precedenti
- 54** Quante equazioni di collinearità possono essere scritte per ciascun punto collimato in un modello stereoscopico?
- a 3                               b 4  
 c 2                               d nessuno dei precedenti
- 55** A cosa serve la procedura denominata *triangolazione aerea*?
- a a migliorare la precisione del rilievo  
 b a ridurre il numero dei punti di appoggio rilevati  
 c a ridurre il numero delle equazioni di collinearità  
 d nessuno dei precedenti
- 56** Con il raddrizzamento di un fotogramma si ottiene una immagine
- a depurata dalle distorsioni  
 b depurata dalle deformazioni della pellicola  
 c depurata dalle deformazioni prospettiche  
 d tutte le precedenti
- 57** L'ortoproiezione è riferita a una zona di terreno
- a piana  
 b piana e orizzontale  
 c con irregolarità inferiori a 1/100 della distanza di presa  
 d non piana e irregolare

**Risultati quesiti vero/falso**

1F, 2F, 3F, 4V, 5F, 6V, 7F, 8V, 9V, 10V, 11F, 12V, 13F, 14V, 15F, 16V, 17F, 18F, 19V, 20F, 21F, 22F, 23V, 24V.

**Risultati quesiti a risposta multipla**

44d, 45b, 46c, 47b, 48d, 49d, 50c, 51b, 52d, 53a, 54b, 55b, 56c, 57d.