Funzioni goniometriche di uno stesso angolo

UNITÀ A1

Consideriamo la **relazione fondamentale della goniometria**:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad (1)$$

e le seguenti relazioni:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad (2)$$

Le relazioni (1) e (2) costituiscono tre relazioni **indipendenti**; con esse, supposto noto il valore di una delle funzioni goniometriche, si possono determinare i valori delle rimanenti.

Relazioni dipendenti da sen α

Dalla (1) si ricava subito:

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Sostituendo questo valore nella prima delle (2) si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Non riportiamo l'espressione della cotangente in funzione del seno dello stesso angolo, che tuttavia risulta ovvia considerando la seconda delle (2).

Relazioni dipendenti da cos α

In modo analogo, supposto noto il valore del coseno, si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

Relazioni dipendenti da tg α

Prendiamo in considerazione la relazione fondamentale (1) e dividiamo entrambi i membri per $\cos^2 \alpha$; si ottiene (ponendo $\cos \alpha \neq 0$):

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{da cui} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \text{ossia}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Quindi, riscrivendo la prima delle (2) come $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ e considerando la relazione precedente, si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

FAQ

► **Cosa sono le relazioni dipendenti della goniometria?**

Sono relazioni ricavate dalle tre relazioni indipendenti, nelle quali ciascuna funzione goniometrica viene espressa in funzione delle altre.