2. Divisione di particelle a forma triangolare con valore unitario costante

UNITÀ 02

Dividente passante per un punto interno o esterno a un angolo e che stacchi una superficie triangolare di area assegnata (problema generale)

Consideriamo un terreno compreso tra *due confini* l e m di lunghezza indefinita e uscenti dal vertice A (potremmo pensarli come due lati consecutivi di un poligono). Sia α l'angolo misurato in A e indichiamo con P un generico **punto interno all'appezzamento**. Deve essere delimitata un'area nota S in adiacenza al vertice A mediante una **dividente passante per il punto *P*** (▶FIGURA 1).

Sistema di riferimento cartesiano obliquo

Il punto P sia stato rilevato rispetto a un **sistema di riferimento obliquo** con origine in A, asse delle ascisse coincidente con il confine l e asse delle ordinate coincidente con il confine m.

Pertanto possiamo considerare note le **coordinate oblique** del punto P, cioè PM e PL, che indichiamo rispettivamente con x_P e y_P.

Tracciamo una generica dividente passante per P e indichiamo con U e V i punti in cui incontra, rispettivamente, l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate. Le **incognite del problema** sono i valori di $AU = u$ e $AV = v$ che devono essere determinati attraverso la *risoluzione di un sistema di due equazioni*. La *prima equazione* è costituita dall'espressione dell'area AVU:

$$S = \frac{u \cdot v \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \tag{1}$$

La *seconda equazione* si ottiene considerando la similitudine dei triangoli AUV e MPV:

$$u : x_P = v : (v - y_P)$$

da cui si ottiene la seguente relazione di uguaglianza:

$$x_P v = u\,(v - y_P) \tag{2}$$

Esplicitando u nella (1) e sostituendo nella (2) si ha:

$$x_P v = \frac{2S}{v \operatorname{sen} \alpha}\,(v - y_P) \qquad \text{cioè} \qquad x_P v^2 \operatorname{sen} \alpha = 2S\,(v - y_P)$$

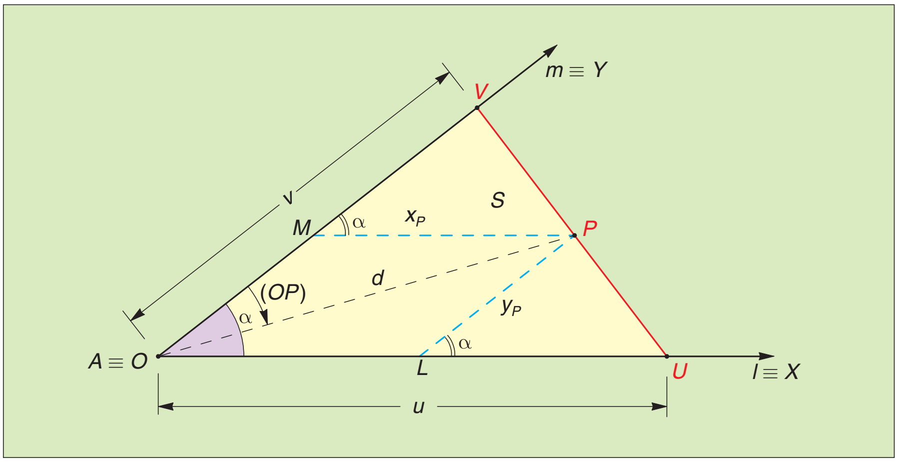

FIGURA 1 Problema generale della dividente rettilinea passante per un punto interno all'appezzamento. La posizione del punto P viene rilevata tramite le coordinate cartesiane x_P e y_P.

Moltiplicando e ordinando la precedente si ottiene la seguente equazione di secondo grado nell'incognita v:

$$(x_P \operatorname{sen} \alpha)\, v^2 - 2S \cdot v + 2S \cdot y_P = 0 \tag{3}$$

Le due soluzioni v_1 e v_2 della (8) vengono calcolate applicando la *formula ridotta*:

$$v_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 2S x_P y_P \operatorname{sen} \alpha}}{x_P \operatorname{sen} \alpha} \tag{4}$$

Determinati i valori di v, questi vengono sostituiti nella (1) per calcolare i corrispondenti valori di u applicando la formula in senso inverso.

• Le soluzioni del problema

La (4) ammette soluzioni solo quando il suo *discriminante è positivo o nullo*, cioè quando i dati del problema soddisfano la relazione:

$$S^2 - 2S\, x_P\, y_P \operatorname{sen} \alpha \geq 0$$

che, dividendo per S, può essere scritta nella forma:

$$S \geq 2\, x_P\, y_P \operatorname{sen} \alpha$$

La quantità $2x_P \cdot y_P \cdot \operatorname{sen} \alpha$ è il **doppio** dell'area del parallelogramma $AMPL$. Pertanto il problema ammette soluzioni solo quando l'area S da staccare è maggiore o uguale al doppio dell'area del parallelogramma $AMPL$. Se è maggiore le soluzioni sono due, cioè per P passano **due dividenti** che staccano ciascuna l'area S. Se è uguale il problema ammette una sola soluzione, cioè per P passa **una sola dividente** che delimita l'area S. Se il discriminante della (4) è negativo, cioè l'area S da staccare è minore del doppio dell'area del parallelogramma $AMPL$, il problema è **impossibile** e quindi per il punto P non passa alcuna dividente capace di delimitare l'area S.

Pertanto, prima di risolvere la (4), è opportuno calcolare il doppio dell'area del suddetto parallelogramma e confrontarlo con S per valutare se esiste o meno la possibilità di risolvere il problema.

• Sistema di riferimento polare o cartesiano ortogonale

La posizione del punto P può essere rilevata attraverso la misura delle *coordinate polari* (OP) e d rispetto a un *sistema di riferimento polare* con il polo coincidente con A e l'asse polare diretto secondo il confine m (▶FIGURA 1). In questo caso il problema viene ancora risolto con la (3) dopo aver calcolato x_P e y_P:

$$x_P = \frac{d}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen}(OP) \qquad y_P = \frac{d}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen}[\alpha - (OP)]$$

Se la posizione del punto P è stata rilevata tramite le *coordinate cartesiane* x'_P e y'_P rispetto a un *sistema di riferimento cartesiano ortogonale* con origine in A e asse delle ascisse coincidente con il confine l, i valori di x_P e y_P da inserire nella risoluzione della (3) sono dati dalle ovvie espressioni:

$$x_P = x'_P - y'_P \operatorname{cotg} \alpha \qquad y_P = \frac{y'_P}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Nel caso in cui la dividente sia vincolata a passare per un punto ***P* esterno all'appezzamento** delimitato dai confini l e m, valgono ancora le considerazioni e le formule risolutive fin qui ricavate. Naturalmente alle coordinate oblique x_P e y_P occorre attribuire i **segni** che loro competono e che dipendono dal quadrante in cui è ubicato il punto P.