2. Baricentro di una superficie poliedrica

Consideriamo una **superficie poliedrica** costituita dalle **facce triangolari** ABD e BCD. Siano G_1, G_2 e G i baricentri, rispettivamente, dei due triangoli e della superficie poliedrica (▶FIGURA 1).

Applicando le (1) si possono calcolare le coordinate dei baricentri $G_1(X_{G1}, Y_{G1}, Q_{G1})$ e $G_2(X_{G2}, Y_{G2}, Q_{G2})$. Indichiamo con G_0, G'_1, G'_2 le proiezioni dei baricentri sul piano orizzontale e siano S_1 e S_2 le aree in proiezione orizzontale dei triangoli ABD e BCD. Le aree S_1 e S_2 si calcolano con le **formule di Gauss**. Osservando la **figura 1** e applicando il noto **teorema di Varignon** si ha:

$$S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2} = (S_1 + S_2) \cdot Y_G$$

da cui:

$$Y_G = \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2}}{S_1 + S_2}$$

Per analogia possono essere ricavate le espressioni:

$$X_G = \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2}}{S_1 + S_2} \qquad Q_G = \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2}}{S_1 + S_2}$$

Estendendo il procedimento a una superficie poliedrica composta da un generico numero n di facce triangolari (falde), si ottiene:

$$X_G = \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2} + ... + S_n \cdot X_{Gn}}{S_1 + S_2 + ... + S_n}$$

$$Y_G = \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2} + ... + S_n \cdot Y_{Gn}}{S_1 + S_2 + ... + S_n} \qquad (1)$$

$$Q_G = \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2} + ... + S_n \cdot Q_{Gn}}{S_1 + S_2 + ... + S_n}$$

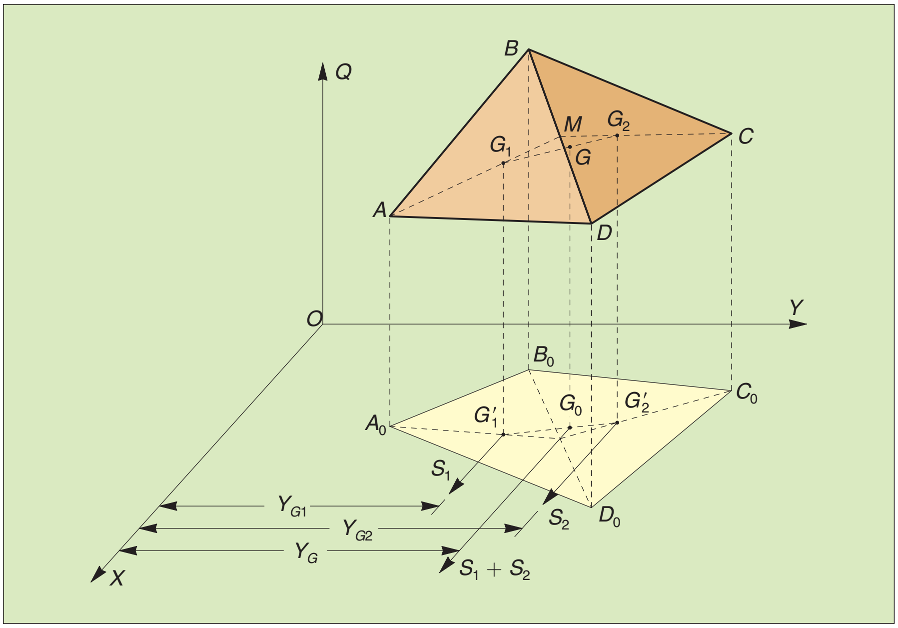

FIGURA 1 Baricentro di una superficie poliedrica di assegnata giacitura spaziale. Le sue coordinate sono fornite dalla media ponderata delle coordinate dei baricentri G_1 e G_2 secondo le aree S_1 e S_2.

Le (1) consentono di calcolare le **coordinate del baricentro** di una superficie poliedrica a facce triangolari. Le coordinate (X_{Gi}, Y_{Gi}, Q_{Gi}) dei baricentri delle facce triangolari in cui è stato suddiviso il poliedro vengono calcolate mediante le medie delle rispettive coordinate dei vertici. Le aree S_i delle proiezioni orizzontali dei triangoli vengono calcolate applicando le **formule di Gauss** (o altre procedure analoghe).

APPLICAZIONE

Problema *Calcolare le coordinate del baricentro della superficie poliedrica rappresentata nella* ▶FIGURA 1 *sapendo che le coordinate dei vertici delle facce triangolari hanno i seguenti valori espressi in metri:*

$$A \equiv (72{,}56;\ 28{,}16;\ 105{,}78) \qquad B \equiv (34{,}35;\ 58{,}94;\ 115{,}38)$$

$$C \equiv (54{,}28;\ 93{,}15;\ 108{,}64) \qquad D \equiv (95{,}75;\ 73{,}24;\ 103{,}72)$$

Soluzione

Con le (1) si calcolano le coordinate dei baricentri G_1 e G_2 dei triangoli ABD e BCD:

$$X_{G1} = (X_A + X_B + X_D)/3 = 67{,}55 \text{ m} \qquad Y_{G1} = (Y_A + Y_B + Y_D)/3 = 53{,}45 \text{ m}$$

$$Q_{G1} = (Q_A + Q_B + Q_D)/3 = 108{,}29 \text{ m}$$

$$X_{G2} = (X_B + X_C + X_D)/3 = 61{,}46 \text{ m} \qquad Y_{G2} = (Y_B + Y_C + Y_D)/3 = 75{,}11 \text{ m}$$

$$Q_{G2} = (Q_B + Q_C + Q_D)/3 = 109{,}25 \text{ m}$$

Per calcolare le aree S_1 e S_2 delle proiezioni orizzontali dei triangoli ABD e BCD si applicano le formule di Gauss:

$$S_1 = Y_A\,(X_B - X_D) + Y_B\,(X_D - X_A) + Y_D\,(X_A - X_B) =$$
$$= 28{,}16 \cdot (-61{,}40) + 58{,}94 \cdot 23{,}19 + 73{,}24 \cdot 38{,}21 = 2436{,}30 \text{ m}^2$$

$$S_2 = Y_B\,(X_C - X_D) + Y_C\,(X_D - X_B) + Y_D\,(X_B - X_C) =$$
$$= 58{,}94 \cdot (-41{,}47) + 93{,}15 \cdot 61{,}40 + 73{,}24 \cdot (-19{,}93) = 1815{,}50 \text{ m}^2$$

Con le (2) si calcolano le coordinate del baricentro G della superficie poliedrica $ABCD$:

$$X_G = \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436{,}30 \cdot 67{,}55 + 1815{,}50 \cdot 61{,}46}{2436{,}30 + 1815{,}50} = 64{,}95 \text{ m}$$

$$Y_G = \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436{,}30 \cdot 53{,}45 + 1815{,}50 \cdot 75{,}11}{2436{,}30 + 1815{,}50} = 62{,}70 \text{ m}$$

$$Q_G = \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436{,}30 \cdot 108{,}29 + 1815{,}50 \cdot 109{,}25}{2436{,}30 + 1815{,}50} = 108{,}70 \text{ m}$$