

4. Rappresentazione grafica dei volumi

Il problema del calcolo dei volumi, oltre alla **soluzione analitica** proposta nei paragrafi 3 e 4, può essere anche sviluppato per via **grafica** con una semplice ed elegante procedura che costituisce di fatto l'**interpretazione grafica** della formula delle **sezioni raggugliate**.

Ripercorriamo dunque i casi fondamentali esaminati nei precedenti paragrafi relativi al calcolo analitico dei volumi.

■ Rappresentazione grafica del volume tra due sezioni omogenee

Consideriamo un tratto del solido stradale compreso tra due sezioni omogenee di sterro **1** e **2** che si trovano a una distanza D e con aree S_1 ed S_2 (► FIGURA 1). Possiamo produrre la seguente semplicissima costruzione grafica. Si assuma un segmento orizzontale AB , che a una certa scala (per esempio 1:2000) rappresenti la distanza D , e si innalzino dai suoi estremi le due ordinate AA' e BB' proporzionali rispettivamente ai valori S_1 ed S_2 a mezzo di un'opportuna **scala convenzionale** (per esempio $1 \text{ cm} \equiv 2 \text{ m}^2$). Si colleghino poi gli estremi A' e B' con un segmento rettilineo.

È facile vedere che l'**area** del trapezio $ABB'A'$, a meno dei coefficienti di scala, rappresenta il **volume** del tronco stradale calcolato con la formula delle **sezioni raggugliate**.

In effetti l'**area grafica** del trapezio $ABB'A'$ è data dalla seguente ovvia espressione:

$$\text{Area grafica} = \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'}}{2} \cdot D = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot D \quad (\text{cm}^2)$$

Essa, come si vede subito, **coincide** con la formula delle **sezioni raggugliate** applicata nelle stesse condizioni [formula (3)]. L'area del trapezio indica pertanto una quantità **proporzionale al volume** del solido stradale compreso tra le due sezioni. Ogni **centimetro quadrato** di quell'area rappresenta un certo numero di metri cubi di scavo (**scala dei volumi**). Questo numero, naturalmente, varia in relazione alla scala usata sia per la distanza D , sia per quella convenzionale stabilita per rappresentare le aree S_1 ed S_2 .

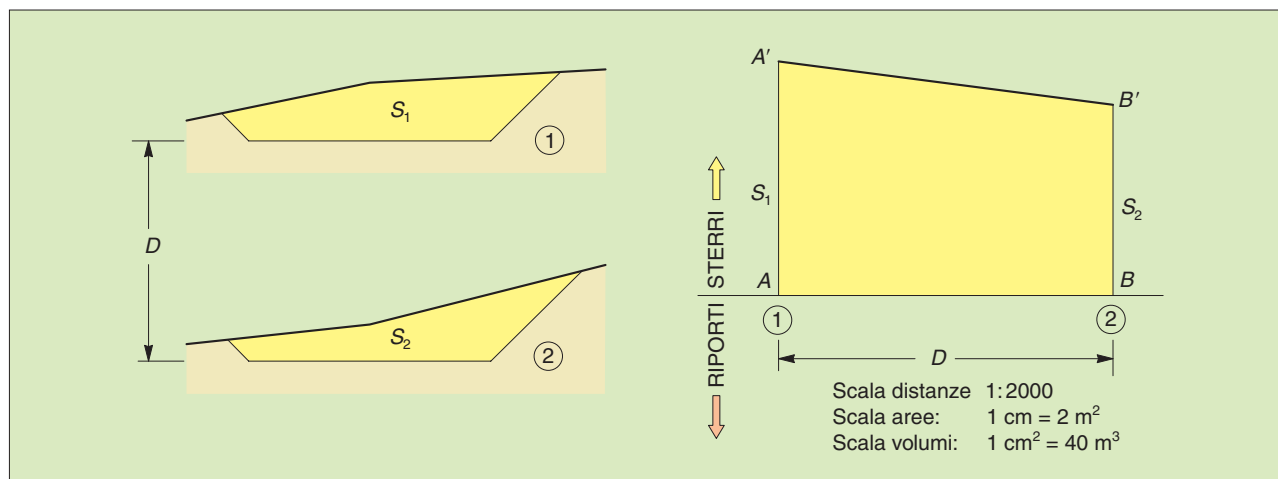


FAQ

► **Quale significato racchiude la rappresentazione grafica ottenuta dal diagramma che in ordinate riporta le aree delle sezioni considerate?**

L'area di questo diagramma, a meno di un coefficiente che tenga conto delle scale, rappresenta il volume del solido stradale compreso tra le sezioni considerate.

FIGURA 1 Rappresentazione grafica dei volumi tra due sezioni omogenee di sterro. In ordinate sono riportate, con una scala convenzionale, le aree delle sezioni.



FAQ

► Quali convenzioni sono usate nella rappresentazione grafica dei volumi?

Essenzialmente due: 1) le aree di riporto sono considerate negative, quindi riportate sotto l'asse *x* delle distanze; 2) le aree di sterro vengono campite in giallo, quelle di riporto in rosso.

Se, per esempio, la distanza è stata riportata in **scala 1:2000** (cioè 1 cm = 20 m) e la **scala convenzionale** con cui sono rappresentate le aree è di 1 cm = 3 m² (quindi, per esempio, 12 m² sono rappresentati con un segmento lungo 4 cm), la **scala dei volumi** diventa:

$$20 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^3 \quad \text{dunque} \quad 1 \text{ cm}^2 \equiv 60 \text{ m}^3$$

Il volume tra le sezioni 1 e 2 pertanto viene ricavato da:

$$V_{12} = (\text{area grafica}) \cdot 60 \text{ m}^3$$

Si usa poi convenzionalmente colorare in **giallo** le aree che si sviluppano nella parte superiore e che rappresentano volumi di **sterro** e in **rosso** quelle inferiori che rappresentano volumi di **riporto**.

■ Rappresentazione grafica del volume tra due sezioni non omogenee

Valutiamo un tratto del solido stradale compreso tra la sezione **1** di sterro con area *S*₁ e la sezione **2** di riporto con area *R*₂ che si trovano a una distanza *D*. Ripetiamo la costruzione grafica precedente (► FIGURA 2). Si prenda, secondo una scala conveniente, un segmento orizzontale *AB* che rappresenti la distanza *D*. In *A* si innalzi l'ordinata *AA'* che, alla **scala convenzionale** scelta per le aree, rappresenti l'area *S*₁. Analogamente da *B* si **abbassi** (le aree di riporto vanno considerate negative) la perpendicolare *BB'* che, alla stessa scala, rappresenti *R*₂. La congiungente *A'* con *B'* taglia in *P* la fondamentale *AB* e si formano i **due triangoli** *APA'* e *PBB'*.

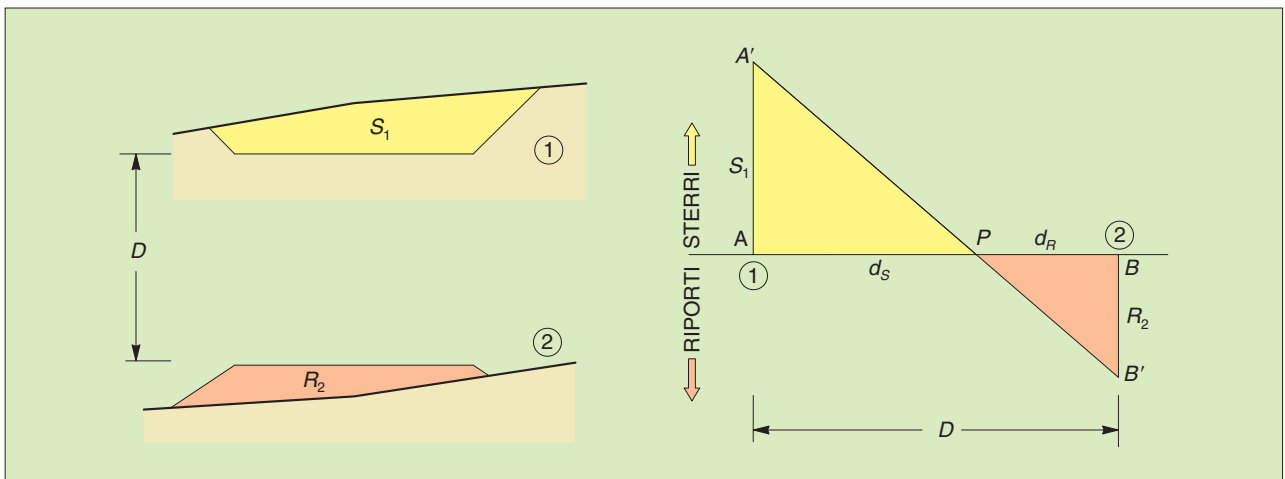
L'area grafica del primo triangolo è proporzionale al **volume del cono di scavo** compreso tra la sezione **1** (di area *S*₁) e la **linea di passaggio**. L'area del secondo triangolo è proporzionale al volume del cono di riporto tra la **linea di passaggio** e la sezione **2** (di area *R*₂).

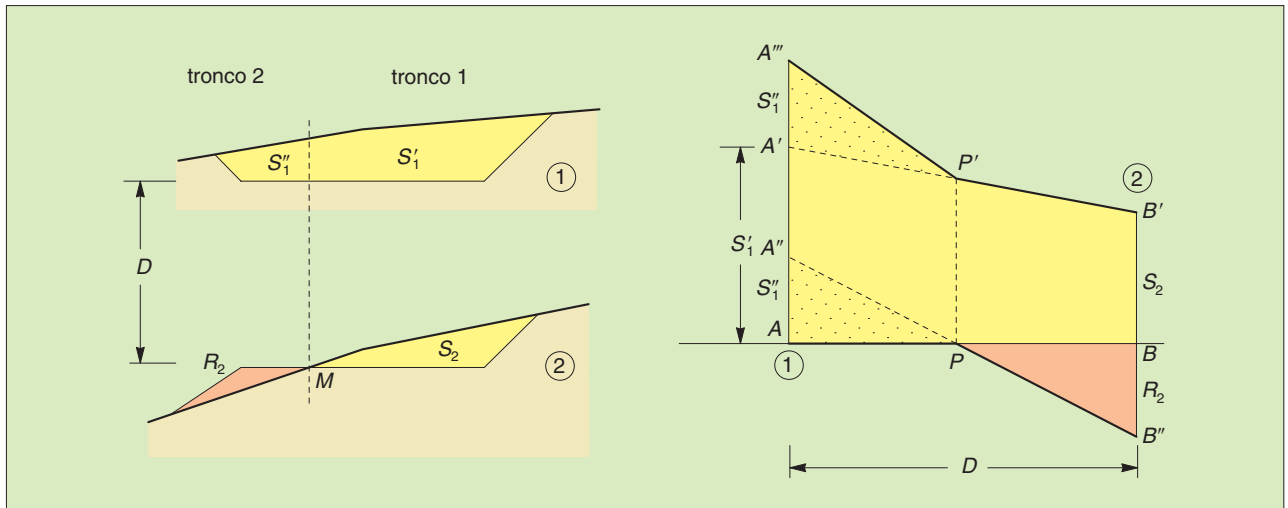
È facile poi verificare che i segmenti *AP* e *BP* sono, rispettivamente, le distanze *d*_S e *d*_R che definiscono la posizione della **linea di passaggio**.

FIGURA 2 Rappresentazione grafica dei volumi tra una sezione di sterro e una di riporto. Sono presenti sia aree di sterro che di riporto, tuttavia mai contemporaneamente sulla stessa ascissa.

■ Rappresentazione grafica del volume in presenza di sezioni miste

Il tronco di strada da considerare può presentare una o entrambe le sezioni del **tipo misto** o a mezza costa. Valutiamo inizialmente un tratto di strada in cui **una**





sola sezione sia mista. Consideriamo un tratto del solido stradale lungo D e compreso tra la sezione **1** di **sterro** con area S_1 e la sezione **2** **mista** costituita dall'area di sterro S_2 e da quella di riporto R_2 . La sezione **1** è stata parzializzata secondo il piano verticale, parallelo all'asse e passante per il punto M di passaggio della sezione mista. Questo piano divide idealmente il corpo stradale in due tronchi che scompongono l'area S_1 in S'_1 e S''_1 (► FIGURA 3).

Analogamente a quanto visto nel calcolo analitico, anche in questo caso occorre prima considerare **separatamente** i due tronchi di solido stradale che si vengono a formare, quindi, successivamente, si dovranno considerare ed eliminare le eventuali **sovrapposizioni** che si vengono a creare nel diagramma.

Dopo aver fissato, a scala conveniente, un segmento orizzontale AB che rappresenti la distanza D , la rappresentazione del **tronco 1**, costituito dalle due aree di sterro S'_1 e S_2 , si ottiene riportando in corrispondenza della sezione **1** e nella **parte superiore** (sterri) l'ordinata AA' proporzionale, secondo un'opportuna scala convenzionale, all'area S'_1 , e l'ordinata BB' , proporzionale all'area S_2 , in corrispondenza della sezione **2**. Il collegamento $A'B'$ completa il trapezio $AA'B'B$ che costituisce la rappresentazione grafica del tronco 1.

Il **tronco 2** viene rappresentato riportando nella parte superiore l'ordinata AA'' proporzionale all'area S''_1 e nella **parte inferiore** (trattandosi di riporto) l'ordinata BB'' proporzionale all'area di riporto R_2 . La congiungente $A''B''$ interseca il segmento AB in P e individua i due triangoli $AA''P$ e $BB''P$ che rappresentano rispettivamente il cuneo di sterro di base S''_1 e quello di riporto di base R_2 .

Osserviamo però che l'area del triangolo $AA''P$ si viene a formare **sovrapponendosi** a parte dell'area del **trapezio** $AA'B'B$ già tracciato in precedenza nella rappresentazione del tronco 1. È pertanto necessario **eliminare** tale sovrapposizione riproducendo l'area considerata in altra parte del diagramma.

In effetti, per evitare di considerare **due volte** l'area del triangolo $AA''P$, che si sovrappone al trapezio $AA'B'B$, si procede nel modo seguente:

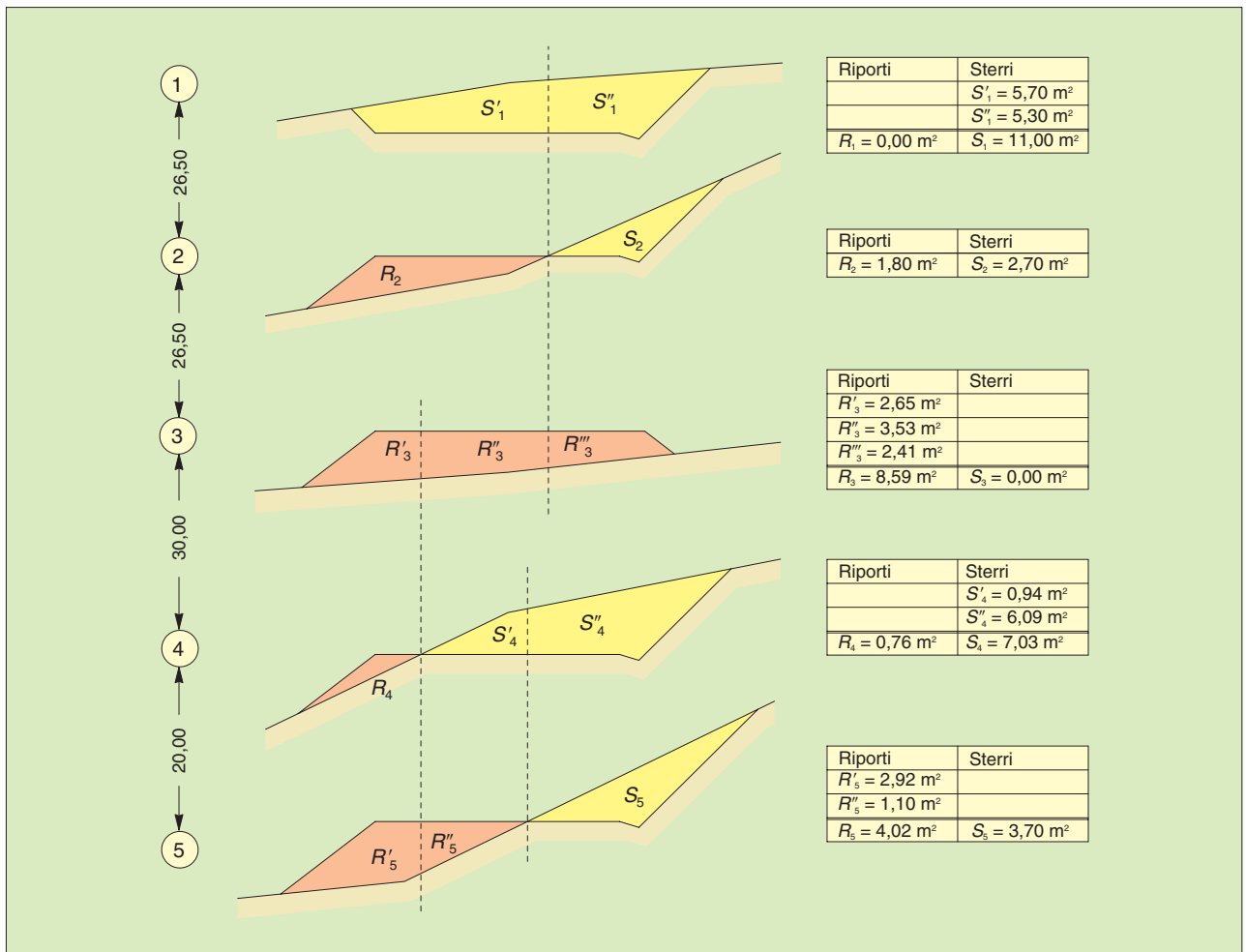
si costruisce il **triangolo** $A'A''P'$ in cui P' viene ottenuto tracciando la **perpendicolare** al segmento AB dal punto di passaggio P , e il segmento $A'A''$, sul prolungamento AA' , è assunto uguale ad AA'' . I due triangoli $AA''P$ e $A'A''P'$ sono **equivalenti** per avere la stessa base ($AA'' = A'A''$ per costruzione) e la stessa altezza, dunque la stessa area.

FIGURA 3 Rappresentazione grafica dei volumi in presenza di una sezione mista. Essa determina la presenza contemporanea, nell'ambito di una stessa ascissa, di aree di sterro e di riporto (tratto da P a B).

FAQ

► **Che cosa comporta, nella rappresentazione grafica dei volumi, la presenza di sezioni miste?**

La presenza di tratti in cui il diagramma si sviluppa contemporaneamente sia sopra sia sotto l'asse delle ascisse, su cui sono riportate le distanze.



Considerando quest'ultimo punto, e osservando la ► FIGURA 6, si nota che tra P_1 e P_2 l'asse delle ascisse separa **aree di scavo** da **aree di riporto**; la stessa situazione avviene tra i punti P_3 e 5.

In queste zone si ha la **simultanea** presenza di aree superiori di **sterro** e aree inferiori di **riporto**.

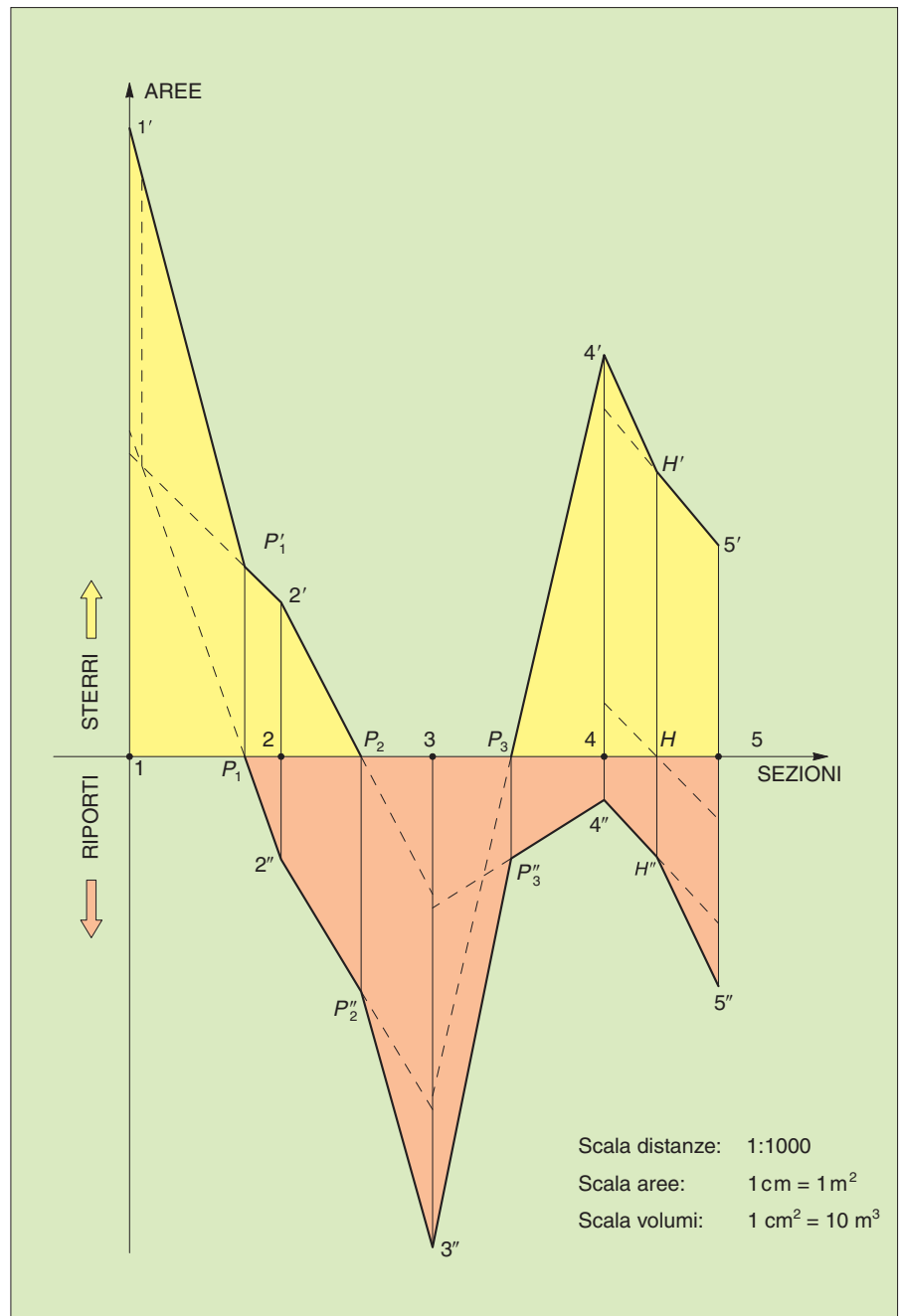
Questo significa che le sezioni sono del tipo *misto*, quindi parte in scavo e parte in rilevato. Ciò consente di effettuare **movimenti di terra di compenso** in senso **trasversale**, nell'ambito della stessa sezione. I tratti P_1 - P_2 e P_3 -5 si chiamano, per questo motivo, zone di **paleggio**.

I volumi di riporto, che possono trovare **compenso** nel corrispondente scavo, mediante il *paleggio*, sono individuati graficamente **ribaltando** e **sovrapponendo** prima la parte superiore del diagramma (gli scavi) sulla parte inferiore del diagramma (riporti) e, successivamente, la parte inferiore su quella superiore. L'**area comune** ai due ribaltamenti è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e rappresenta il doppio del volume dei paleggi trasversali.

La procedura di ribaltamento è stata riprodotta nella ► FIGURA 7, che pertanto costituisce il **diagramma delle aree** con l'**evidenziazione dei paleggi**.

FIGURA 5 Gruppo di cinque sezioni con aree parzializzate. Esse verranno utilizzate negli esempi successivi.

FIGURA 6 Diagramma delle aree senza l'evidenziazione dei paleggi. Essi, tuttavia, sono localizzati nei tratti in cui vi è la contemporanea presenza di aree sia sopra sia sotto l'asse delle ascisse, dunque nei tratti P_1P_2 e P_35 .



Il **diagramma delle aree** con l'**evidenziazione dei paleggi** mette bene in evidenza l'entità e la distribuzione sia dei paleggi, sia dei volumi che dovranno subire spostamenti in direzione **longitudinale** all'asse. Questi ultimi sono rappresentati da tutte quelle zone del diagramma non coperte dai paleggi.

Tuttavia, mentre per quanto riguarda i *paleggi* non sono necessari particolari studi e le informazioni presenti nel *diagramma delle aree* sono sufficienti sia per prevederne i costi che per programmarne i lavori, i **movimenti longitudinali** sono più complessi e possono essere sviluppati con molteplici modalità, pertanto è necessario un loro **studio** al fine di razionalizzare la loro **esecuzione** e minimizzare i relativi **costi**.

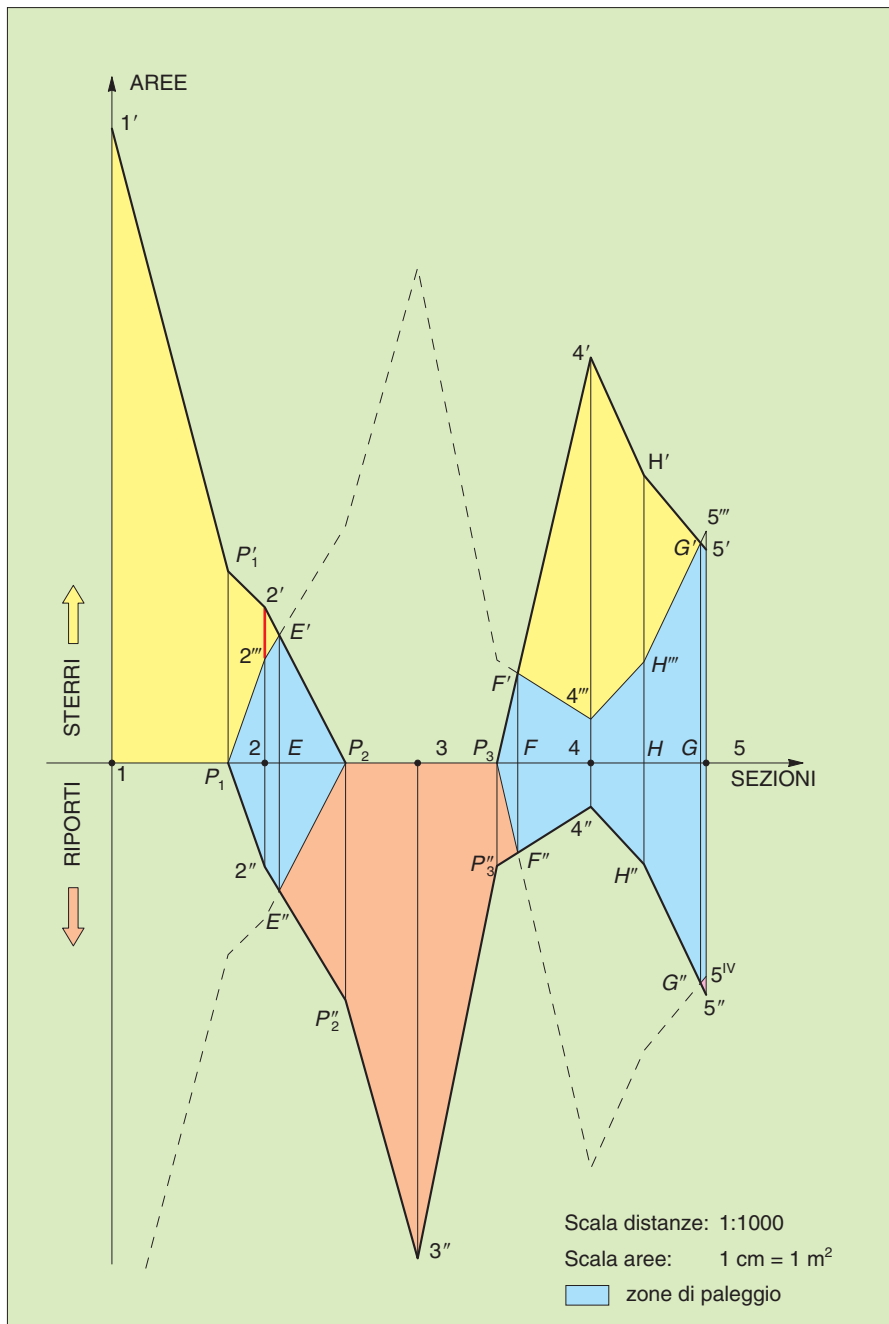


FIGURA 7 Diagramma delle aree con l'evidenziazione dei paleggi, le cui zone sono determinate dall'intersezione dei ribaltamenti reciproci delle aree di sterro su quelle di riporto e viceversa.

Peraltro, tra i volumi *spostati longitudinalmente* occorrerà anche stabilire quali possano essere **compensati** e quali dovranno costituire le cave di **deposito** o di **prestito**.

A questo fine viene redatto un apposito elaborato grafico chiamato **profilo di Brückner**. Esso viene ricavato dal *diagramma delle aree*. Tuttavia, dovendo valutare solo i volumi con **spostamenti longitudinali**, è necessario costruire un'ulteriore versione del *diagramma delle aree*, ricavata dal precedente con l'eliminazione delle aree di paleggio, ottenendo in tal modo il **diagramma delle aree depurato dai paleggi** (► FIGURA 8).

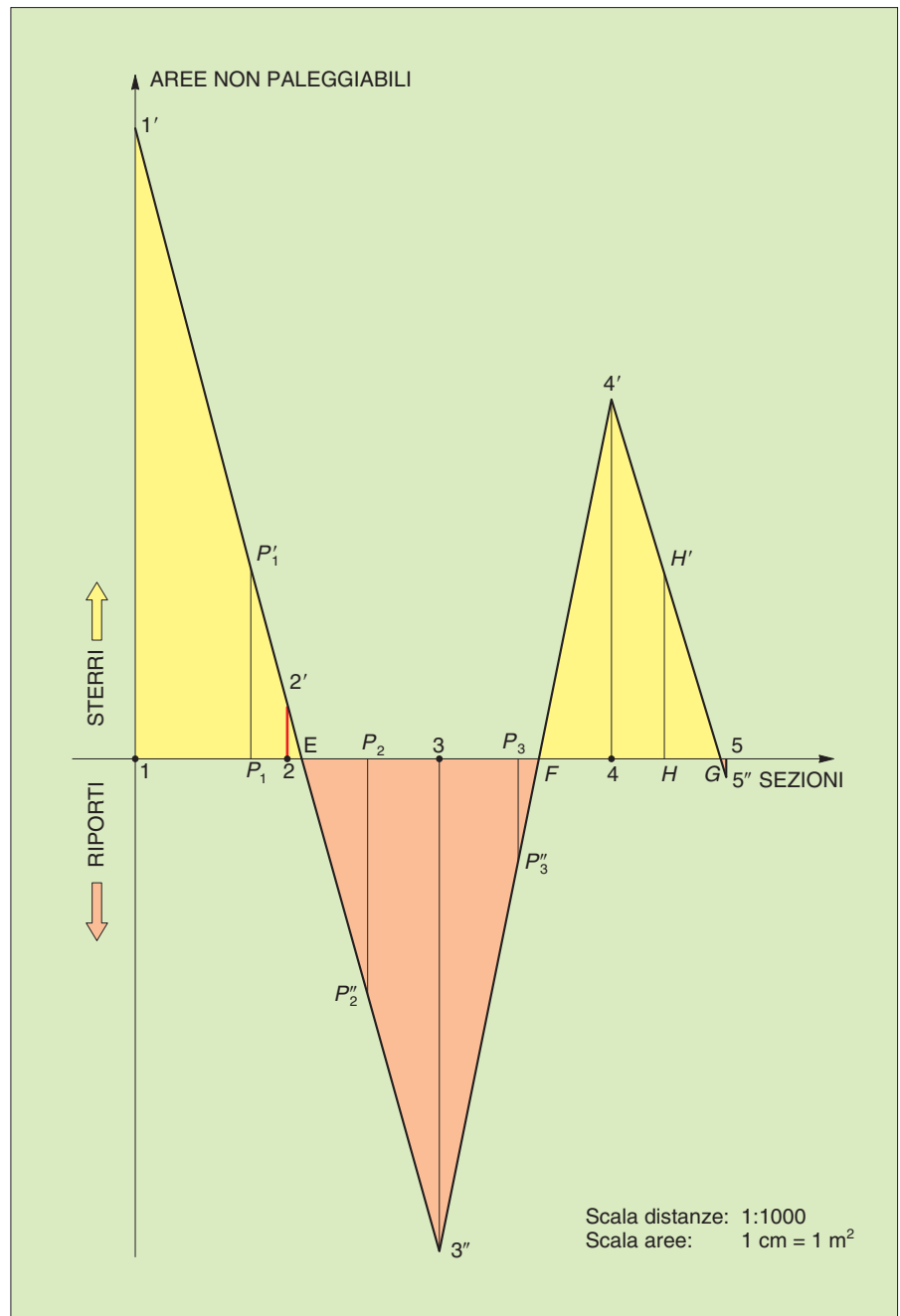
In questo diagramma sono presenti solo le aree che rappresentano masse che devono subire movimenti *longitudinali*; esse sono anche indicate come **aree non paleggiabili**.

FAQ

► **L'esecuzione dei paleggi richiede particolari studi progettuali?**

No, si tratta di brevi movimenti trasversali da monte a valle che non richiedono alcuno studio, in quanto eseguibili in un solo modo.

FIGURA 8 Diagramma delle aree depurato dai paleggi (aree non paleggiabili).



FAQ

► **Il diagramma delle aree depurato dai paleggi ha una funzione autonoma?**

No, esso viene costruito allo scopo di ottenere, attraverso la sua integrazione grafica, il profilo di Brückner. Con esso vengono studiati i movimenti longitudinali (non paleggiabili).

La costruzione di questo nuovo diagramma è molto semplice: basta riportare, in corrispondenza dei picchetti 1, P₁, 2, E, P₂ ecc., le **ordinate** al netto delle ordinate di **paleggio**. Così, per esempio, l'ordinata 22' (► FIGURA 8) del *diagramma depurato* coincide con l'ordinata 2'2'' del diagramma con i paleggi. Naturalmente la **forma** di questo diagramma cambia sensibilmente, ma esso mantiene l'**equivalenza** rispetto a tutte le aree che devono subire movimenti longitudinali, quindi non ne muta l'entità dei volumi in gioco (volumi **non paleggiabili**).

Se in un progetto si incontrano terreni che danno luogo a materiale di sterro **non idoneo** per formare i rilevati, bisognerà eliminare dal profilo delle aree quelle **strisce verticali** i cui volumi si riferiscono a questi scavi.

■ Profilo di Brückner

Ricordiamo che l'area di un tratto di *diagramma delle aree* rappresenta un volume. Per potere studiare i **movimenti longitudinali** dei volumi di terra, occorre allora calcolare l'**area del diagramma delle aree depurato dai paleggi**. Eseguendo questo calcolo con il metodo dell'**integrazione grafica**, procedura grafica illustrata nel precedente modulo O, si ottiene una curva (in realtà una spezzata), che prende il nome di **linea integrale**, essa costituisce il profilo di **Brückner**.

Le **ordinate** di questa linea, naturalmente lette in opportuna scala, rappresentano la **somma algebrica** (positivi gli sterri, negativi i riporti) di tutti i **volumi** non paleggiabili fino all'ordinata considerata.

Nella ► **FIGURA 9** è stato riportato il precedente **diagramma delle aree depurato**, e ne è stata fatta l'integrazione grafica assumendo come *distanza polare* il segmento $O1 = 2$ cm, detto **base di integrazione**. Ricordiamo che un'ordinata qualunque relativa alla **linea integrale** rappresenta l'altezza di un rettangolo di base $O1$ (nel nostro caso 2 cm) equivalente a tutta l'area che rimane alla sinistra dell'ordinata. Così l'ordinata $3-3^*$, moltiplicata per la **base** $O1$, fornisce la somma algebrica tra l'area della figura $1-1'-P_1'-2'-E$ (**positiva** perché sterro) e quella $E-P_2''-3''-3$ (**negativa** perché riporto), quindi la somma algebrica dei **volumi non paleggiabili** del solido stradale compreso nel tratto 1-3.

Naturalmente, se si fosse adottata una base $O1$ di 4 cm (valore **doppio** del precedente), le ordinate della linea integrale sarebbero più piccole, e precisamente la **metà** di quelle che si vedono in figura. Al contrario, se la base $O1$ fosse più piccola, per esempio 1 cm, le ordinate sarebbero più grandi, in questo caso il doppio.

La scelta della **base** d'integrazione va fatta con buon senso. Osservando le aree da integrare, si stabilirà la base in modo che le **ordinate** non risultino né troppo piccole, né troppo grandi.

Ricordiamo che una qualunque **ordinata** del **profilo di Brückner**, a meno di un fattore di proporzionalità, rappresenta tutta l'**area** racchiusa dal profilo delle aree depurato a sinistra dell'ordinata stessa, quindi il **volume non paleggiabile** del solido stradale dall'origine fino alla sezione cui si riferisce l'ordinata considerata. Sono da segnalare le seguenti, significative, proprietà.

- Quando questo volume è **positivo** (ordinata positiva), significa che tra l'origine e la sezione considerata **prevalgono** gli **sterri**. Viceversa, un valore **negativo** di tale volume (quando la curva integrale si sviluppa nella parte inferiore del diagramma) testimonia, nello stesso tratto, la **prevalenza di riporti**.
- Osserviamo poi che l'andamento del profilo di Brückner prevede tratti **ascendenti** che si alternano a tratti **discendenti**. Se in un tratto di strada l'andamento del profilo di Brückner è **ascendente** significa che nello stesso tratto si ha una **prevalenza** dei volumi di **sterro**. Viceversa, in corrispondenza di un tratto **discendente** si verifica una **prevalenza** dei volumi di **riporto**, naturalmente nel medesimo tratto.
- La **differenza** tra le ordinate corrispondenti a due sezioni rappresenta il **volume** non paleggiabile che si realizza nel tratto compreso tra le due sezioni considerate.
- In corrispondenza dei punti in cui il profilo di Brückner **interseca** l'asse delle ascisse, si realizza l'uguaglianza tra la somma dei volumi non paleggiabili di sterro e quelli di riporto.

La **scala** con cui vanno lette le **ordinate** del profilo di Brückner (**scala dei volumi**) è fornita dal **prodotto** della scala delle **distanze**, per la scala delle **aree**, per la **base**

FAQ

► **Per quale ragione è necessario uno studio progettuale per stabilire le modalità con cui eseguire i movimenti longitudinali?**

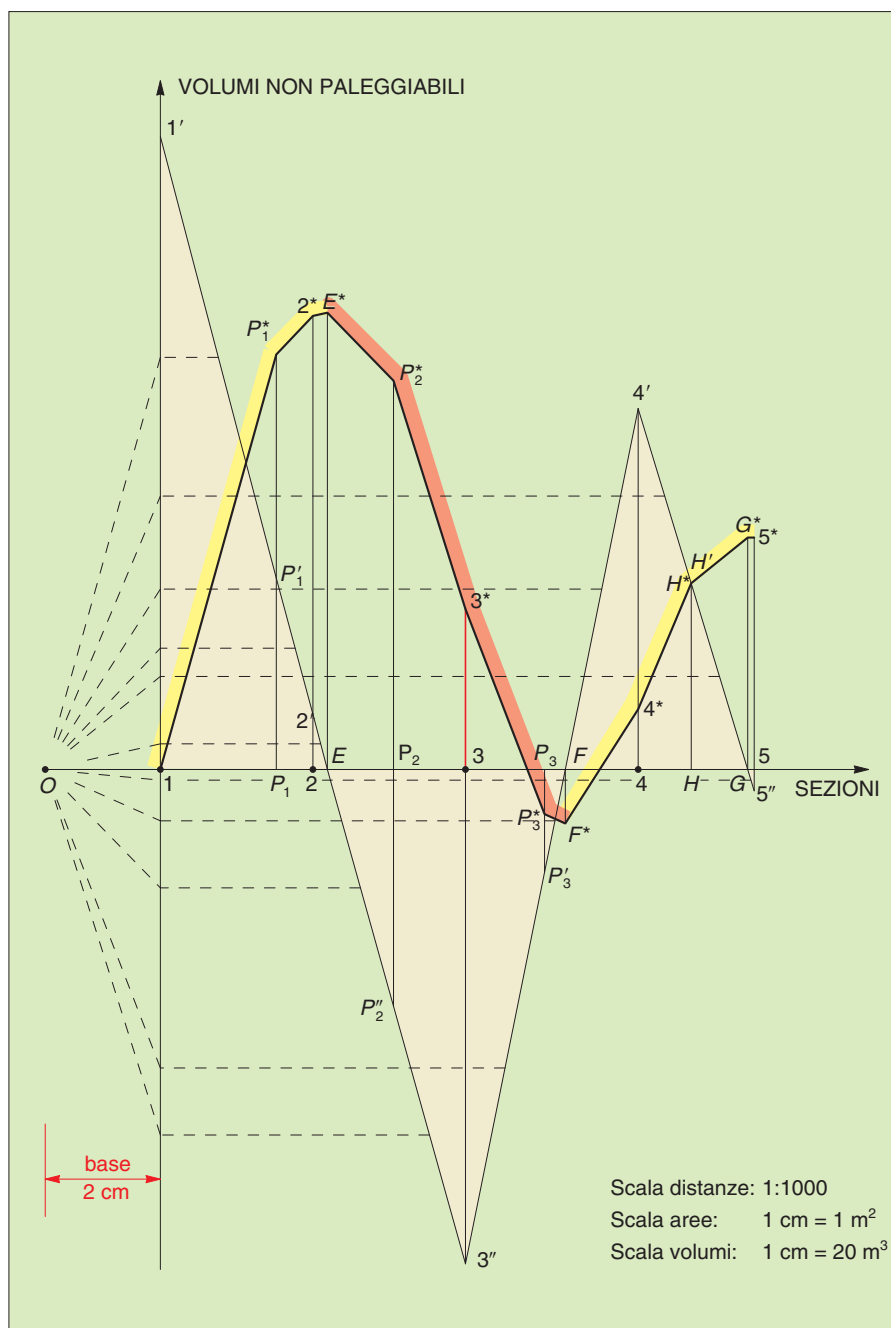
Perché questi movimenti possono essere realizzati in numerosi modi, per cui è necessario uno studio che ne individui quello più conveniente.

FAQ

► **A che cosa serve il profilo di Brückner?**

Costituisce lo strumento per lo studio e la programmazione dei movimenti di terre delle masse rimanenti dopo aver eseguito i paleggi (volumi non paleggiabili).

FIGURA 9 Profilo di Brückner ottenuto per integrazione grafica del diagramma delle aree non paleggiabili.



FAQ

► Perché si parla di profilo e non di diagramma di Brückner?

Perché le sue caratteristiche sono ricavate dal suo andamento (linea integrale), piuttosto che dalle aree che esso racchiude.

d'integrazione. Poiché, nel nostro esempio, la scala delle distanze (1:1000) è di **1 cm = 10 m**, la scala delle aree è di **1 cm = 1 m²** e la distanza polare è di **2 cm**, la scala in cui vanno lette le ordinate del profilo di Brückner di ► FIGURA 9 sarà:

$$1 \text{ cm} = 10 \cdot 1 \cdot 2 = 20 \text{ m}^3 \quad (\text{scala convenzionale dei volumi})$$