David Acheson

1089 e altri numeri magici

Un viaggio sorprendente nella matematica

Traduzione di Luisa Doplicher

Chiavi di lettura a cura di
Federico Tibone e Lisa Vozza

CHIAVI DI LETTURA ZANICHELLI

indice

La magia del 1089

Pensate un numero di tre cifre.

Va bene qualsiasi numero di tre cifre, purché la prima e l'ultima cifra differiscano di almeno 2 unità.

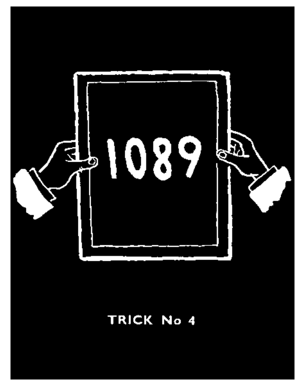
Ora scrivete il numero al contrario, invertendo l'ordine delle cifre; poi prendete il minore dei due numeri così ottenuti e sottraetelo dall'altro.

Per esempio, se il numero che avete pensato è 782, fate la sottrazione:

$$782 - 287 = 495.$$

Infine prendete il risultato e sommatelo allo stesso numero scritto al contrario:

$$495 + 594 = 1089.$$



Alla fine del procedimento, dunque, il risultato finale è 1089.

Ma certamente ci attenderemmo che questo risultato dipenda dal numero di tre cifre che si è scelto all'inizio.

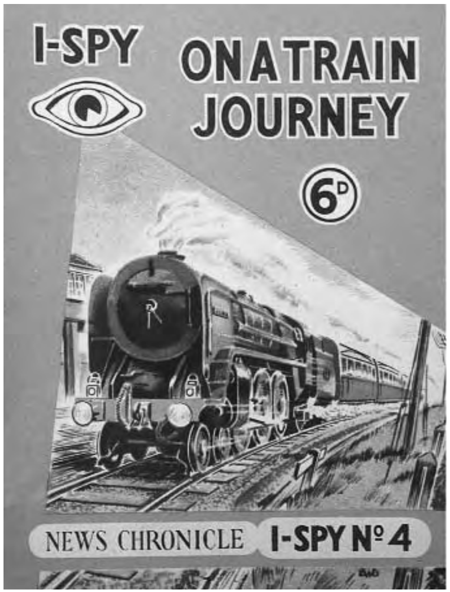
E invece *no*.

Il risultato finale è sempre 1089.

A quanto ricordo, il «trucco del 1089» è stato il primo assaggio di matematica che mi ha davvero colpito.

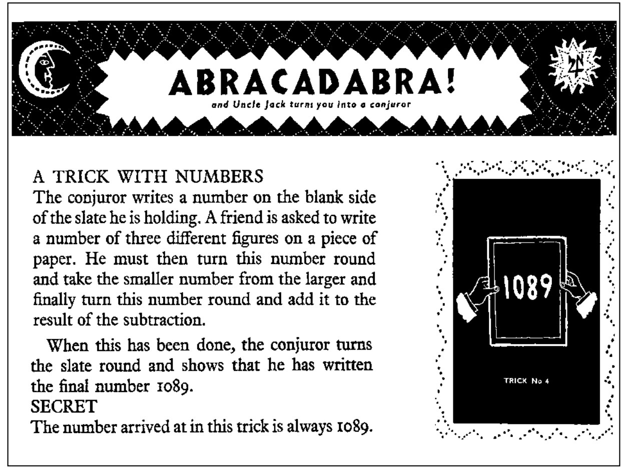
Mi ci sono imbattuto quando avevo dieci anni, leggendo il periodico annuale *I-SPY** del 1956.

I-SPY era un libro per ragazzi pubblicato da un noto giornale inglese dell'epoca; conteneva un assortimento di storie d'avventura e articoli più educativi, con titoli come «La vita nello stagno».



* «*I spy with my little eye something beginning with …*» («Con i miei occhietti vedo una cosa che inizia con la …») è tra i più popolari giochi per bambini nel mondo anglosassone: dalla lettera iniziale bisogna risalire a ciò che ha visto la persona che conduce il gioco. [*N.d.T.*]

Ma la parte che preferivo di gran lunga era quella dei trucchi «magici», come quello del 1089 che vi ho appena descritto:



ABRACADABRA!

and Uncle Jack turns you into a conjuror

A TRICK WITH NUMBERS
The conjuror writes a number on the blank side of the slate he is holding. A friend is asked to write a number of three different figures on a piece of paper. He must then turn this number round and take the smaller number from the larger and finally turn this number round and add it to the result of the subtraction.

When this has been done, the conjuror turns the slate round and shows that he has written the final number 1089.

SECRET
The number arrived at in this trick is always 1089.

1089

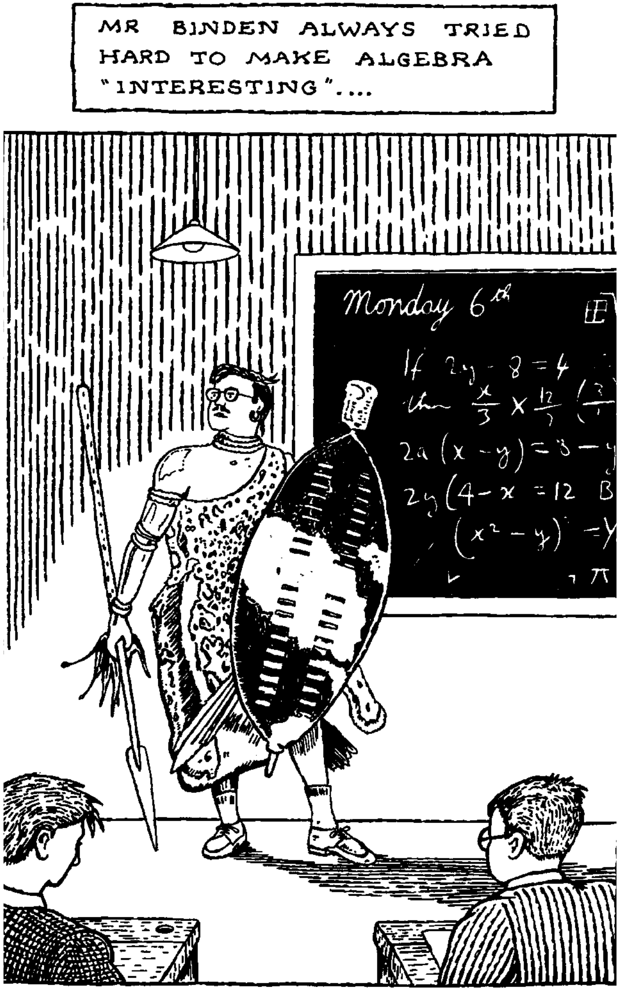
TRICK No 4

C'erano anche altri giochi di prestigio, come «Il bicchiere d'acqua che scompare» oppure «Lettura del pensiero».

Ma per qualche motivo è stato «1089» a catturare la mia attenzione in modo speciale.

Era l'elemento di mistero e sorpresa, penso, a mettere questo risultato un gradino più su rispetto alle cose che studiavamo a scuola.

Ora, non voglio dire che non mi piacessero «le tabelline» e altri argomenti di matematica elementare; tutt'altro.



Il professor Binden faceva sempre di tutto per rendere l'algebra «interessante»... (disegno © Glen Baxter).

Ma se vi dico per esempio che all'epoca ci assegnavano compiti a casa di questo tipo:

> A e B riempiono una cisterna in 4 ore. A e C riempiono la stessa cisterna in 5 ore. B lavora a ritmo doppio di C. Determinare quanto tempo ci metterebbe C a riempire la cisterna da solo.**

penso che capirete come mai il trucco del 1089 colpisse tanto la mia immaginazione.

E ora, più di quarant'anni dopo, mi sembra che questo stesso elemento di mistero e sorpresa si ritrovi in gran parte della matematica migliore. Alcuni teoremi e risultati di primissima classe suscitano davvero un senso di *meraviglia.*

Nel corso del libro spero di riuscire a darvene un'idea, così come spero di riuscire a farvi vedere che ogni tanto danno grande soddisfazione anche i ragionamenti deduttivi che si usano per *dimostrare* quei teoremi e quei risultati.

Oltre a tutto questo, esamineremo alcune applicazioni notevoli della matematica alle altre scienze e alla natura.

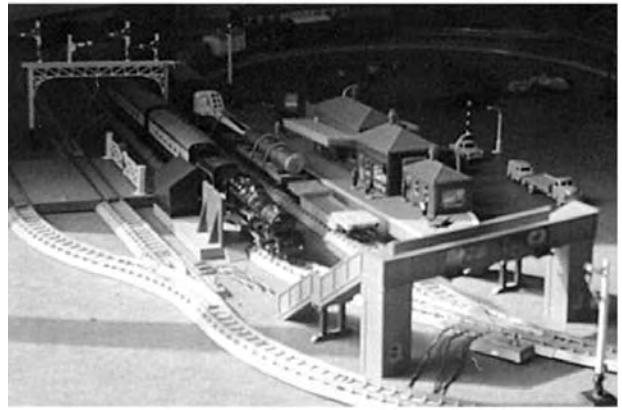
Così, non importa se siete giovani, giovanissimi, adulti oppure anziani; se andate a scuola o all'università, o se non studiate; se avete in mano una penna oppure un gin tonic... comunque sia preparatevi, stiamo per metterci in viaggio.

** La risposta è che C ci avrebbe messo venti ore a riempire la cisterna, poveraccio.

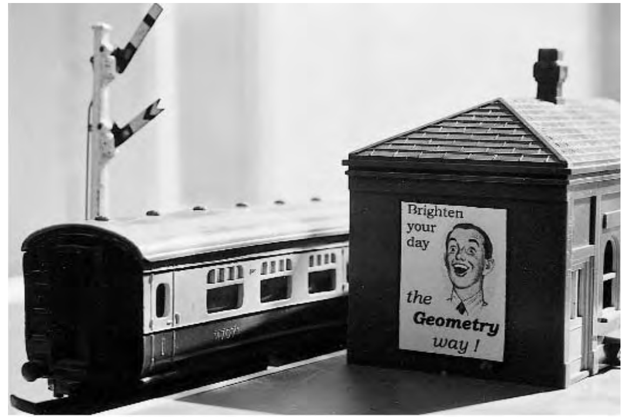
Lungo la strada incontreremo alcune fra le più importanti idee della matematica, e conosceremo un po' della loro storia.

In breve, partiremo dai fondamenti e arriveremo alle frontiere della matematica. E siccome non vogliamo perdere di vista il quadro globale, viaggeremo abbastanza veloci.

Se immaginiamo per esempio che il viaggio avvenga in treno, si tratterà allora dell'*Eurostar della matematica*...



Innamorarsi della geometria



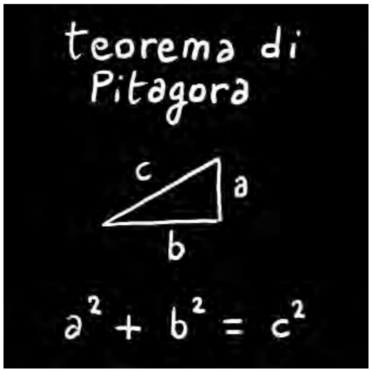
A volte si può restare sorpresi dalla matematica.

Uno degli esempi meglio documentati è offerto da questo aneddoto raccontato da John Aubrey nel suo libro *Brief Lives* a proposito del filosofo Thomas Hobbes (1588–1679):

> Aveva quarant'anni quando si dedicò alla geometria, e ciò accadde per caso. Si trovava nella biblioteca di un signore e trovò aperto il volume degli *Elementi* di Euclide, precisamente al *47 El. libri I*. Lesse la proposizione. «Per Dio...» esclamò (di quando in quando bestemmiava per dare enfasi al discorso) «questo è impossibile!»

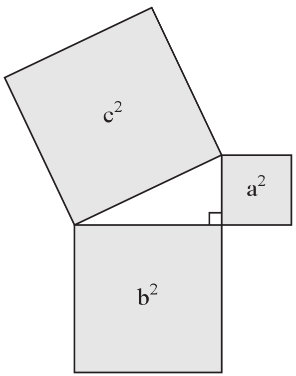
Questo è proprio un esempio della miglior matematica: Hobbes trovò il risultato così sorprendente che non riusciva a crederci fino in fondo.

In realtà il risultato in questione altro non era che il *teorema di Pitagora*: se a, b e c sono i lati di un triangolo rettangolo e c è il lato più lungo, allora $a^2 + b^2 = c^2$.



E per convincersene Hobbes non si limitò a credere a qualcuno sulla parola: lesse una *dimostrazione*. E fu questa dimostrazione, nelle parole di Aubrey, a farlo «innamorare della geometria».

Quindi ora anche noi dimostreremo il teorema di Pitagora.



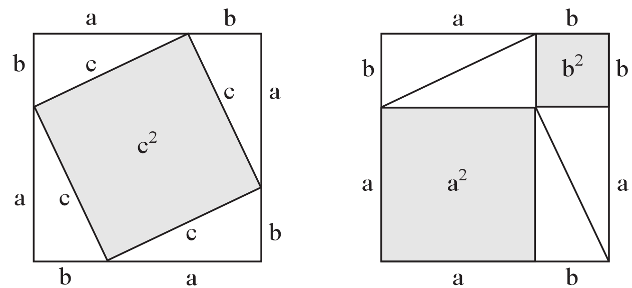
Ovviamente capisco che potreste chiedervi: *perché darsene la pena*? Dopotutto quel teorema è in giro da più di duemila anni. Lo conoscono tutti.

Di certo, se non fosse valido, se avesse un qualsiasi problema, *a quest'ora qualcuno se ne sarebbe accorto*.

In matematica, però, questo tipo di ragionamento non ha alcun valore.

E in ogni caso la dimostrazione del teorema di Pitagora che ora vedremo è così semplice ed elegante da essere quasi un divertimento.

Considerate un quadrato di lato $a + b$ e inseriteci quattro copie del triangolo rettangolo originale, come nella figura qui sotto a sinistra. In questo modo rimane libera una regione quadrata di area c^2.



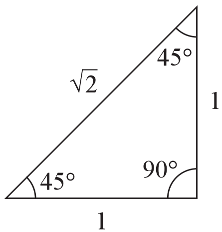
Ora immaginate che i rettangoli siano piastrelle bianche su un pavimento scuro, e spostatene tre in modo che occupino le nuove posizioni mostrate nella figura a destra.

L'area del pavimento *sgombro da triangoli* adesso è $a^2 + b^2$, eppure deve essere la stessa di prima.

Quindi $a^2 + b^2 = c^2$.

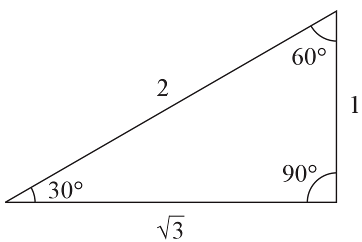
Due casi particolari del teorema di Pitagora sono di speciale interesse.

Uno è quello in cui gli angoli minori del triangolo rettangolo valgono entrambi 45°:



Se i due lati minori hanno entrambi, mettiamo, lunghezza pari a 1, allora il lato lungo misura $\sqrt{2}$: questo è uno dei modi tipici in cui la radice quadrata di 2 fa la sua comparsa in matematica.

Un altro caso particolare che capita spesso è quello in cui gli angoli minori valgono 30° e 60°:



Ma questi sono proprio casi particolari e niente più. La vera forza e importanza del teorema di Pitagora sta nella sua *generalità*: è altrettanto valido

se il triangolo rettangolo in questione è corto e tozzo, oppure lungo e sottile.

E lo sappiamo non perché ce lo assicura il Professor X – esperto di fama mondiale, a quanto si dice – ma perché l'abbiamo verificato di persona.

Se il teorema di Pitagora è il risultato più noto dell'intera geometria, quello che lo segue in classifica sono di sicuro le formule per la lunghezza della circonferenza e per l'area di un cerchio di raggio *r*:

Ed è così che il numero speciale:

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

fa la sua prima comparsa in matematica.

Nella matematica «elementare» π ha sempre a che fare con i cerchi.

Immaginatevi allora quale sorpresa è stata, per i matematici della metà del Seicento, scoprire che π in realtà faceva capolino in ogni sorta di posti che non sembravano avere proprio niente a che spartire con i cerchi.

Tra i più famosi risultati del genere c'è uno straordinario collegamento tra π e i numeri *dispari*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Qui i puntini indicano che a destra del segno di uguaglianza bisogna continuare ad aggiungere e sottrarre frazioni *all'infinito*.

Tanto per cominciare, quindi, non è affatto scontato che la «somma» in questione debba assestarsi su un valore ben definito.

Ma anche ammettendo che sia così, perché mai quel valore dovrebbe essere proprio π /4?

Che diavolo c'entrano i cerchi con i numeri dispari 1, 3, 5, 7, ...?

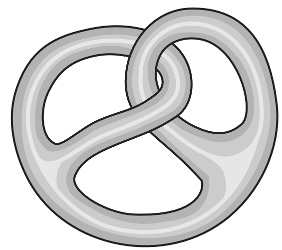
Sono proprio i *collegamenti* sbalorditivi come questo a mandare in visibilio i matematici.

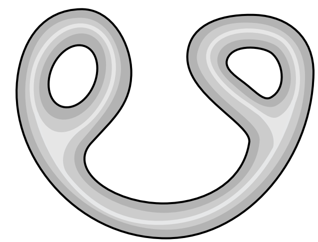
Oggi il campo di studio della geometria si estende ben oltre il mondo dei triangoli rettangoli, dei cerchi e così via. Ci sono addirittura branche della disciplina in cui i concetti di lunghezza, angolo e area non compaiono per nulla.

Una di queste branche è la *topologia*, una sorta di geometria degli oggetti di gomma, in cui un problema ricorrente è stabilire se un certo oggetto geometrico sia deformabile in un altro «senza strappi».

Problemi di questo genere possono essere molto ardui e perfino controintuitivi.

Osservate per esempio i due oggetti geometrici qui sotto: secondo voi è possibile deformare il primo oggetto, senza strapparlo, così da trasformarlo nell'oggetto sottostante?

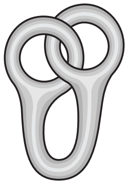




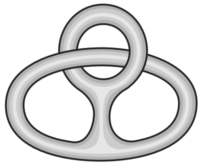
Se preferite, immaginate che l'oggetto di partenza sia fatto di un materiale molto elastico, che si può allungare o comprimere a piacere.

Allora: è possibile deformare l'oggetto «annodato» – senza tagliarlo o strapparlo – in modo tale da trasformarlo nella versione «snodata»?

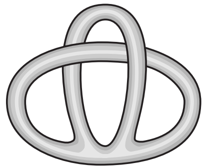
Be’, in realtà… *sì*, è possibile. Ecco come:



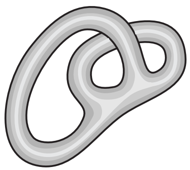
1



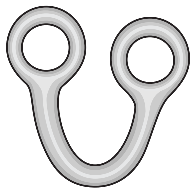
2



3



4



5

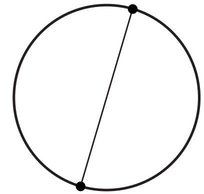
Concludiamo però il capitolo ritornando a una delle eredità più importanti della geometria degli antichi Greci: il concetto di *dimostrazione*.

Un motivo per sottolineare quest’idea già all’inizio del libro è che in matematica può essere fin troppo facile saltare alle conclusioni sbagliate.

Ed è soprattutto pericoloso saltare a conclusioni generali sulla base di pochi casi particolari.

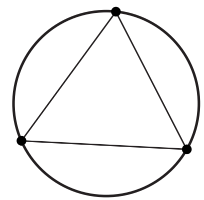
Ecco un esempio. Prendete un cerchio, segnate due punti sulla circonferenza e uniteli con un segmento di retta.

La linea divide il cerchio in due regioni:



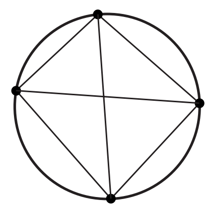
$n = 2$

Ora segnate invece *tre* punti sulla circonferenza e unite ciascun punto a *tutti* gli altri con linee rette. Si ottengono quattro regioni:



$n = 3$

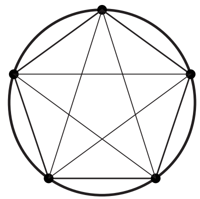
Se facciamo lo stesso con quattro punti, troviamo otto regioni:



$n = 4$

Il meccanismo pare chiaro, no? Il numero di regioni raddoppia ogni volta che si aggiunge un punto.

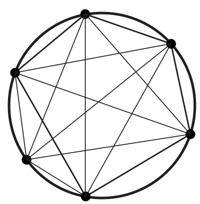
Allora è lecito aspettarsi che con $n = 5$ ci saranno sedici regioni. E infatti è proprio così:



$n = 5$

A questo punto potremo senz'altro concludere fiduciosamente che per $n = 6$ il numero di regioni distinte sarà trentadue.

E invece no.
Le regioni sono *trentuno*, come potete verificare:



$n = 6$

E la formula generale per il numero di regioni non è affatto quella semplice che immaginavamo.
È invece questa: $(n^4 - 6\,n^3 + 23\,n^2 - 18\,n + 24) / 24$.
Ecco perché i matematici vogliono sempre avere *dimostrazioni* rigorose.

CAPITOLO 3

Ma... è assurdo!

Alla fine dell'avventura *Diadema di berilli* Sherlock Holmes come al solito spiega il suo metodo deduttivo e osserva:

> È una mia vecchia massima che, quando si è escluso l'impossibile, ciò che rimane, per quanto improbabile, deve essere necessariamente la verità.

In un certo senso questo assomiglia alla *dimostrazione per assurdo*, una delle tecniche più eleganti ed efficaci di tutta la matematica.

L'idea di base è dimostrare che una certa proposizione è vera studiando la possibilità che sia falsa, e poi facendo vedere che questo porta a una contraddizione o a un'assurdità di qualche tipo. Quindi la proposizione non può essere falsa, e l'unica possibilità rimasta è che sia vera.

Questo modo di ragionare è chiamato a volte tecnica dimostrativa «indiretta», o *reductio ad absurdum*.

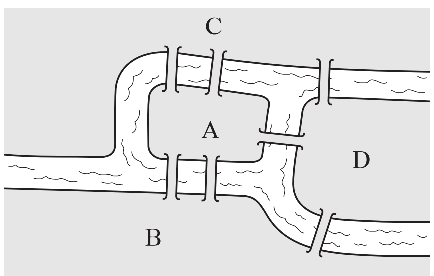
Come primo esempio considerate il cosiddetto *problema dei ponti di Königsberg*, che attirò l'attenzione del grande matematico svizzero Leonhard Euler (per noi Eulero) nel 1736.

All'epoca Königsberg era una città della Prussia orientale, divisa dal fiume Pregel in varie parti collegate da sette ponti.

I cittadini di Königsberg attraversavano questi ponti nelle lunghe e tranquille passeggiate della domenica pomeriggio. E rimuginavano, a quanto si racconta, su un particolare problema: è possibile fare una passeggiata per la città in modo da attraversare ogni ponte *una e una sola volta*?

Ora, a prima vista ci troviamo di fronte al compito noioso e scoraggiante di esaminare tutti i possibili itinerari, uno alla volta, e verificare che nessuno funziona. Ma, come ha dimostrato Eulero, c'è un modo astuto per evitarsi questa penitenza. E il suo ragionamento si può presentare in modo convincente come dimostrazione per assurdo.

Immaginate quindi che sia *davvero* possibile fare una simile passeggiata. In altre parole partiamo da



una delle quattro regioni, A, B, C o D, e arriviamo in una di queste (magari la stessa) dopo aver attraversato tutti i sette ponti una volta sola.

La conseguenza immediata è che ci sono almeno due regioni in cui la passeggiata non inizia né finisce. Consideratene una. Ci arriviamo un certo numero di volte e la abbandoniamo un numero identico di volte, ma siccome attraversiamo ogni ponte una volta sola, il numero dei ponti che conducono a questa regione deve essere pari.

Ma dal nostro disegno schematico di Königsberg si vede bene che nessuna regione ha questa proprietà: all'isola A conducono cinque ponti, alle regioni B, C e D, invece, tre ciascuna.

Perciò *non è* possibile fare una passeggiata a Königsberg seguendo questo itinerario particolare.

O almeno non lo era nel 1736. Per quanto ne so la situazione oggi è cambiata: Königsberg ora si chiama Kaliningrad e ha soltanto cinque ponti, per lo più frutto della ricostruzione seguita alla Seconda guerra mondiale.

Per vedere un esempio più profondo di dimostrazione per assurdo, passiamo all'argomento dei *numeri primi*.

Un numero primo è un numero intero maggiore di 1 che è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.

Quindi:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\ldots$$

sono tutti primi, ma 15 per esempio no, perché è divisibile per 3 e per 5.

Tutti i numeri interi maggiori di 1 sono o primi oppure esprimibili come prodotti di numeri primi. Così 17 per esempio è primo, mentre 18 si può scrivere come $2 \times 3 \times 3$. In questo senso i numeri primi sono i «mattoncini» a partire da cui si possono creare gli altri numeri interi, tramite moltiplicazioni.

All'inizio i numeri primi sono abbastanza frequenti, ma poi si rarefanno man mano che si va verso nu-

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

L'elenco dei primi cento numeri primi.

meri interi più grandi. Per esempio tra i numeri minori di 100 i numeri primi sono il 25%, mentre tra i numeri minori di 1 000 000 sono soltanto il 7,9%.

Ma allora una domanda ovvia è: l'elenco dei numeri primi si arresta del tutto a un certo punto, oppure va avanti all'infinito?

Ed Euclide ha scoperto la risposta: *ci sono infiniti numeri primi*.

Ma come ha fatto a *dimostrarlo*?

La risposta è che ha fatto ricorso alla dimostrazione per assurdo.

Ha cominciato perciò ipotizzando che ci fosse un numero finito di primi; in tal caso ci sarà un numero primo *massimo*, che chiameremo p. L'elenco completo dei numeri primi sarà quindi:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p.$$

E fin qui tutto bene. Persino ovvio, direte voi. Ma il passo successivo è davvero brillante.

L'idea ingegnosa di Euclide è stata di considerare questo numero:

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p + 1$$

cioè quello ottenuto moltiplicando tutti i numeri primi e poi aggiungendo 1.

Ora, questo numero è senz'altro maggiore di p, e siccome p è il numero primo più grande, questo nuovo numero N non può essere primo.

Deve essere allora possibile scriverlo come prodotto di primi, cioè deve essere divisibile per almeno un numero primo.

Ma non lo è: se dividete N per qualsiasi primo dell'elenco 2, 3, 5, ..., p otterrete sempre un resto di 1.

Siamo dunque arrivati a una contraddizione, e la sola via d'uscita è che l'ipotesi originaria sia sbagliata: i numeri primi non possono essere in quantità finita; perciò devono essercene infiniti.

Ma alcuni problemi della teoria dei numeri sono più insidiosi.

Consideriamo per esempio i numeri interi, e chiediamoci se sia possibile esprimere un quadrato come somma di due altri quadrati. Dopo un po' di tentativi scopriremo che è senz'altro possibile:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

questo è un esempio, e ce ne sono parecchi altri.

Ma se cerchiamo di individuare due *cubi* che sommati diano un *cubo*, la storia è ben diversa. Mettendoci d'impegno a far prove, con numeri abbastanza grandi, ci imbatteremo in alcuni buffi «fuochini». Per esempio:

$$729^3 + 244^3 = 401\,947\,273$$

mentre:

$$738^3 = 401\,947\,272$$

che è «quasi» quello che ci serve... ma *non esattamente*. E per quanto ci si provi, sembra davvero impossibile trovare tre numeri interi a, b e c tali che $a^3 + b^3 = c^3$. Non solo, ma pare che la stessa situazione si verifichi per $a^4 + b^4 = c^4$.

Tutto questo era stato previsto nel 1637, quando il matematico francese Pierre de Fermat scarabocchiò su un manuale di matematica un'affermazione di portata davvero notevole:

> *Ultimo teorema di Fermat*. È impossibile trovare numeri interi a, b e c tali che:
>
> $$a^n + b^n = c^n$$
>
> quando n è un numero intero maggiore di 2.

La cosa più irritante di tutte è che Fermat aggiunse:

> Ho una dimostrazione davvero meravigliosa di questo teorema, ma questo margine è troppo stretto per contenerla.

Ma anche ammesso che Fermat abbia davvero scoperto una «dimostrazione» simile, nessuno l'ha mai trovata. E si è dovuto aspettare il 1993 perché Andrew Wiles annunciasse di aver infine dimostrato l'ultimo teorema di Fermat; fra gli eventi matematici del Novecento, dev'essere stato quello che ha ricevuto la massima pubblicità.

Anche se la dimostrazione di Wiles è accessibile soltanto agli esperti del campo, essa sfrutta comunque lo stesso tipo generale di ragionamento di cui abbiamo appena parlato.

Così, a più di duemila anni da quando Euclide la applicò con tanto successo ai numeri primi, l'idea di dimostrazione per assurdo è ancora viva e vegeta.