Martin Gardner
Dracula, Platone e Darwin

Giochi matematici
e riflessioni sul mondo

Traduzione di Federico Tibone

Chiavi di lettura a cura di
Federico Tibone e Lisa Vozza

CHIAVI DI LETTURA **ZANICHELLI**

indice

CAPITOLO 1

Dracula si fa un Bloody Mary

Questo brano, apparso originariamente nella rivista *Isaac Asimov's Science Fiction Magazine* del settembre 1979, inizia con un classico enigma e poi mostra come lo si possa applicare in due sorprendenti trucchi con le carte. La letteratura sui trucchi matematici con le carte è ormai vasta; chi volesse saperne di più troverà una buona introduzione nel mio *Enigmi e giochi matematici*, BUR Rizzoli 2001.

«È l'ora del cocktail, cara» disse il conte Dracula alla moglie. «Va bene il solito?».

«Il solito» rispose la signora Dracula.

Il conte prese dall'armadio dei liquori una bottiglia contenente un litro di vodka e una bottiglietta contenente mezzo litro di sangue umano. Versò nella vodka una piccola quantità di sangue, agitò vigorosamente la bottiglia, poi riversò esattamente la stessa quantità di liquido nella bottiglietta del sangue. Alla fine, così, c'era di nuovo un litro nella bottiglia e mezzo litro nella bottiglietta.

La signora Dracula in poltrona dava le spalle al marito, ma lo osservava nello specchio sulla parete del salone. Il conte stava seguendo la ricetta tradizionale transilvanica per fare un Bloody Mary vampiresco.

Ora supponiamo che, quando la vodka e il sangue umano si mescolano, nessuno dei due cambi volume. Alla fine delle due operazioni descritte sopra, c'è più vodka nella bottiglietta del sangue oppure più sangue nella bottiglia di vodka? Oppure le due quantità sono uguali?

La versione più diffusa dell'enigma usa due bicchieri identici, uno pieno d'acqua e l'altro di vino. In questa variante però i due contenitori hanno capienze diverse, e non sappiamo quale sia la quantità di liquido che viene trasferita.

Soluzione

Se si prova a risolvere il puzzle per via algebrica, usando quantità esatte, si finisce per impantanarsi. Esiste però una dimostrazione ridicolmente semplice del fatto che la quantità di sangue nella vodka deve essere esattamente uguale alla quantità di vodka nel sangue.

Sappiamo che alla fine c'è, come all'inizio, un litro di liquido nella bottiglia e mezzo litro di liquido nella bottiglietta. Consideriamo per esempio la bottiglia: qui manca una quantità x di vodka; ma siccome il volume del liquido è sempre pari a un litro, la quantità mancante deve essere stata sostituita da una quantità x di sangue! E naturalmente lo stesso ragionamento si applica alla bottiglietta: se vi manca una quantità x di sangue, il sangue mancante è certamente sostituito da una quantità x di vodka.

In realtà si potrebbero anche trasferire più volte quantità variabili di liquido da un contenitore all'altro, e poi viceversa; ma se alla fine c'è un litro nella bottiglia e mezzo litro nella bottiglietta, il risultato sarà sempre lo stesso. E anche le dimensioni dei contenitori non hanno alcuna importanza: il volume di vodka nel sangue deve essere uguale al volume di sangue nella vodka!

Sapreste inventare un semplice trucco con le carte basato sullo stesso principio?

Fate un mazzetto con le ventisei carte nere di un mazzo. A fianco mettete un altro mazzetto con, per esempio, tredici carte rosse. Voltatevi e chiedete a qualcuno di aiutarvi: deve prendere quante carte vuole dal mazzetto nero e mescolarle nel mazzetto rosso; poi deve prendere lo stesso numero di carte dal mazzetto che prima era tutto rosso, e mescolarle nel mazzetto nero.

Ora vi girate, vi massaggiate pensosamente le tempie, poi annunciate che i vostri poteri di chiaroveggenza vi dicono che il numero delle carte rosse nel mazzetto nero è esattamente uguale al numero delle carte nere nel mazzetto rosso.

Dev'essere per forza così, per la stessa ragione spiegata nella soluzione al problema del Bloody Mary. Potete anche chiedere a uno spettatore di mescolare insieme i due mazzetti, poi di tagliarli a piacere in un mazzetto da ventisei carte e in uno da tredici. Il risultato finale sarà sempre lo stesso.

Ora tornate all'inizio e rileggete la prima parte di questo brano: quale errore marchiano è stato fatto nel descrivere la preparazione del cocktail da parte del conte Dracula?

Il testo dice che la signora Dracula osservava il marito in uno specchio. Ma come ogni lettore sa, o dovrebbe sapere, i vampiri *non* si riflettono negli specchi.

Poscritto

Ci sono centinaia di trucchi con le carte che sfruttano in sostanza il principio appena descritto. Ecco un buon esempio che potete provare con gli amici.

Prima di mostrare il trucco, tagliate un mazzo di 52 carte esattamente a metà. Girate a faccia in su uno dei mazzetti, poi mescolate le 26 carte coperte insieme alle 26 scoperte. All'inizio del trucco fate vedere che il mazzo contiene carte coperte e carte scoperte, ma non dite quante sono quelle che avete girato.

Chiedete a qualcuno di mescolare il mazzo e poi di passarvelo sotto il tavolo. Un attimo dopo tirerete fuori le carte, metà in una mano e metà nell'altra, e annuncerete che ciascuna metà contiene esattamente lo stesso numero di carte scoperte! Quando il pubblico controllerà, risulterà che è proprio così.

Il segreto: mentre avete le mani sotto il tavolo, contate 26 carte; poi, prima di portare le carte sopra il tavolo, capovolgete uno dei due mazzetti da 26 carte. Riuscite a vedere perché il trucco funziona?

Prima del capovolgimento, il numero delle carte coperte in uno qualsiasi dei due mazzetti deve essere uguale al numero delle carte scoperte nell'altro. Capovolgendone uno, le sue carte coperte diventano scoperte, e viceversa. Dunque alla fine il numero delle carte coperte (o scoperte) è lo stesso nei due mazzetti.

La sequenza di Fibonacci

La sequenza di Fibonacci inizia così: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Dopo i primi due numeri, ciascun numero è la somma dei due che lo precedono. Una sequenza di Fibonacci *generalizzata* inizia con due interi scelti arbitrariamente.
I numeri di Fibonacci sono oggetto di una vasta letteratura. Negli Usa c'è perfino un periodico chiamato *The Fibonacci Quarterly*. Questo articolo su certi aspetti poco noti dei numeri di Fibonacci è comparso sul *Journal of Recreational Mathematics* (34: 183–90, 2005–06).

Sono passati vent'anni dalla mia ultima intervista al Dr Matrix, a un convegno di matematica a Lisbona; da allora avevo perso del tutto le tracce del vecchio birbante. Così è stata una sorpresa e un grande piacere incontrarlo a un convegno sulla teoria dei numeri all'università di Stanford, dove doveva parlare sul tema «Curiosità poco note riguardo ai numeri di Fibonacci».

Il Dr Matrix era visibilmente invecchiato. Ora i capelli erano candidi, ma gli occhi color smeraldo erano svegli e penetranti come sempre, e il passo sicuro. Mi ha dato una copia della sua presentazione, e da lì e da alcune conversazioni successive ho appreso i bizzarri fatti che seguono.

Chiamiamo A, B, C, D quattro qualsiasi numeri consecutivi di una sequenza di Fibonacci generalizzata. Allora i prodotti A × D e due volte B × C sono sempre numeri che fanno parte di una terna pitagorica!

Più precisamente si ha che:

$$(A \times D)^2 + (2 \times B \times C)^2 = (B^2 + C^2)^2$$

Prendiamo per esempio i primi quattro termini della sequenza più semplice: 1, 1, 2, 3. Sostituendo questi valori nella formula, si trova il familiare teorema di Pitagora per il triangolo rettangolo con lati 3, 4, 5.

È facile verificare che la formula è valida; basta tenere conto del fatto che, per definizione, C = A + B (e dunque D = A + 2B) e svolgere alcuni calcoli algebrici.

Poi il Dr Matrix ha mostrato sullo schermo il vecchio paradosso dell'area che cambia. Il quadrato della figura 1 ha un'area pari a 64 quadratini. Quando si riarrangiano i pezzi a formare un rettangolo, l'area aumenta a 65 quadratini!

In realtà lungo la diagonale c'è un po' di spazio fra i triangoli, ma il disegno è stato realizzato in modo che ciò non si noti.

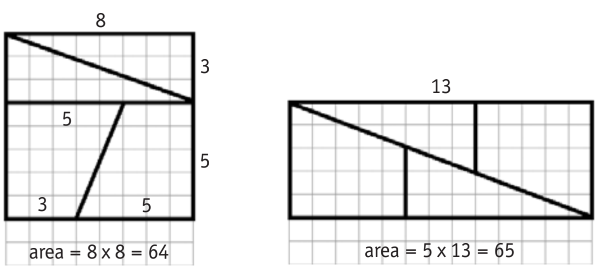


Figura 1 I quattro pezzi del quadrato sono usati per formare un rettangolo, e magicamente l'area aumenta!

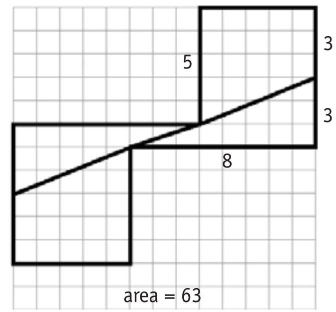


Figura 2 Un diverso arrangiamento dei pezzi della figura 1.

Se poi si riarrangiano di nuovo i pezzi come nella figura 2, l'area si riduce a 63 quadratini!

Adesso i due triangoli impercettibilmente si sovrappongono, perciò l'area diminuisce.

È da notare che le lunghezze dei segmenti in questo classico paradosso valgono 3, 5, 8 e 13: quattro termini consecutivi della sequenza di Fibonacci.

Una nota proprietà della sequenza è che il quadrato di un suo numero *n* è sempre pari al prodotto dei due numeri precedente e successivo, più o meno 1.

In virtù di questa proprietà si può costruire il quadrato usando come lato un qualsiasi numero di Fibonacci maggiore di 1, e poi tagliarlo a pezzi in base ai due numeri precedenti della sequenza.

Nel caso della figura 1 il quadrato ha lato pari a 8 e l'area vale 64. Tagliando i pezzi in base ai numeri 3 e 5, automaticamente i lati del rettangolo diventano 5 e 13. Perciò il rettangolo deve avere area pari a 65, con un guadagno di un'unità.

Se invece scegliamo un quadrato con lato 13, divideremo tre dei suoi lati in segmenti di lunghezza 5 e 8, tracciando le linee inclinate come nella figura 3.

Ora il quadrato ha area pari a 169, mentre il rettangolo formato dagli stessi pezzi ha lati 21 e 8, e dunque area pari a 168. Lungo la diagonale del rettangolo si ha una sovrapposizione dei triangoli e così si perde un'unità, invece di guadagnarla.

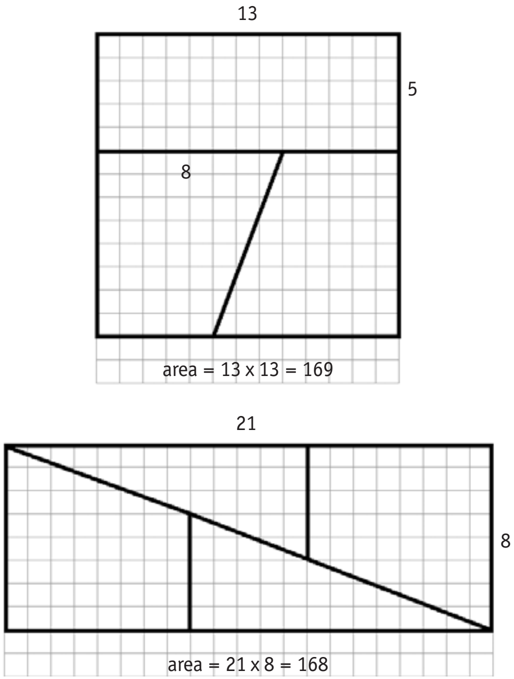


Figura 3 Usando i quattro pezzi del quadrato di lato 13 per formare un rettangolo, l'area si riduce: lungo la diagonale c'è un'impercettibile sovrapposizione dei due triangoli.

Si ha una perdita di un'unità anche se come lato del quadrato si sceglie 5. Questo ci porta a una regola assai curiosa: usando numeri di Fibonacci per il lato del quadrato, ogni due numeri si produce una *spaziatura* lungo la diagonale del rettangolo, con apparente *guadagno* di un'unità; quando invece si usano i numeri alternati, lungo la diagonale si ha una *sovrapposizione*, con apparente *perdita* di un'unità.

Quando si sale nella sequenza, la spaziatura e la sovrapposizione diventano sempre meno evidenti. Se invece si scende nella sequenza, le si nota sempre di più, come mostra la figura 4. Si può perfino costruire il paradosso iniziando da un quadrato con lato pari a 2 sole unità, ma in tal caso il rettangolo 3×1 richiede una sovrapposizione così evidente che l'effetto del paradosso va completamente perduto.

Il tentativo più antico di generalizzare il paradosso quadrato-rettangolo collegandolo alla sequenza di Fibonacci si trova a quanto pare in un articolo del 1879 di V. Schlegel su *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Nel 1908 E.B. Escott pubblicò un'analisi simile su *Open Court*, descrivendo un modo lievemen-

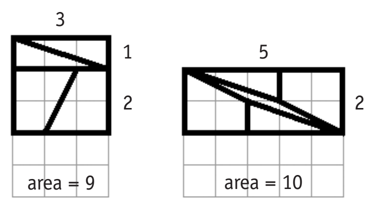


Figura 4 La soluzione dell'apparente paradosso diventa evidente nel caso di un quadrato di lato 3.

te diverso di tagliare il quadrato. Lewis Carroll era interessato al paradosso e lasciò alcune note incomplete con formule per trovare altre dimensioni dei pezzi.

Si può ottenere un'infinità di altre variazioni se si basa il paradosso su altre sequenze di Fibonacci. Per esempio un quadrato basato sulla sequenza 2, 4, 6, 10, 16, 26, … darà guadagni e perdite di 4 quadratini. Per determinare l'entità dei guadagni e delle perdite basta prendere la differenza tra il quadrato di un qualsiasi numero della sequenza e il prodotto dei due numeri adiacenti. Così per esempio la serie 3, 4, 7, 11, 18, … produce guadagni e perdite di 5 unità.

T. de Moulidars, nella sua *Grande Encyclopédie des Jeux*, raffigura un quadrato basato sulla sequenza 1, 4, 5, 9, 14, …. Il quadrato ha lato 9 e quando è trasformato in rettangolo perde 11 unità di area. Anche la sequenza 2, 5, 7, 12, 19, … produce perdite e guadagni pari a 11. In entrambi i casi però la sovrapposizione (o la spaziatura) lungo la diagonale del rettangolo è così grande da risultare evidente.

Se chiamiamo A, B e C tre numeri di Fibonacci consecutivi qualsiasi, e X la perdita o il guadagno in area, allora valgono le due formule seguenti:

$$A + B = C$$
$$B^2 = AC \pm X$$

Qui possiamo inserire qualsiasi valore X desiderato per la perdita o il guadagno, e qualsiasi lunghezza B che vogliamo per il lato del quadrato. Si ottengono così equazioni quadratiche che daranno

gli altri due numeri A e C della sequenza, anche se naturalmente potranno non essere numeri razionali.

È impossibile per esempio produrre perdite o guadagni di due o di tre quadratini dividendo i lati del quadrato in segmenti di lunghezza razionale. Occorre fare suddivisioni irrazionali: per esempio la sequenza di Fibonacci $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$,… dà un guadagno o una perdita di 2, e la sequenza $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$,… dà un guadagno o una perdita di 3.

Nella sua conferenza il Dr Matrix è stato così gentile da citare come fonte i capitoli 8 e 9 del mio *Enigmi e giochi matematici* (BUR Rizzoli 2001), che sono dedicati a varie sorprendenti scomparse geometriche, tra cui la scomparsa di volti e di persone.

C'è anche la brillante innovazione di Paul Curry, un mago dilettante, illustrata dalla figura 5: un riarrangiamento dei pezzi forma una figura apparentemente della stessa area, ma con un bel buco dentro!

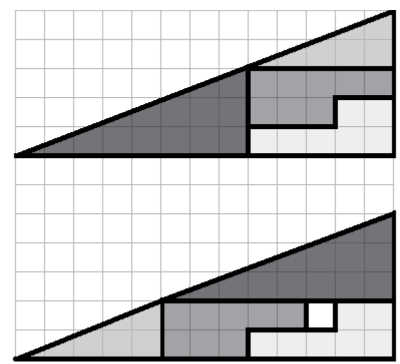


Figura 5 Un esempio del paradosso di Curry.

Il Dr Matrix ha poi terminato la lezione introducendo la *sequenza di Tribonacci*, che si ottiene sommando i *tre* numeri precedenti:

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \ldots$$

Nella sequenza generalizzata di Fibonacci il rapporto tra numeri consecutivi converge a 0,618…, l'inverso della famosa sezione aurea. Nella sequenza di Tribonacci il rapporto converge invece a 0,543….

Nella sequenza di *Tetronacci* ogni numero si ottiene sommando i *quattro* numeri precedenti. E si può naturalmente generalizzare a *n* termini. Quando *n* tende a infinito, il rapporto tra termini consecutivi della sequenza converge verso il limite 0,5.

Ho poi appreso da Donald Knuth, il celebre informatico di Stanford, che queste sequenze sono state introdotte originariamente nel 1356 da Narayana Pandit, nel capitolo 13 di una meravigliosa opera in sanscrito intitolata *Ganita Kaumudi* («Il piacere del calcolo»). In seguito le sequenze sono state riscoperte da Mark Feinberg quando aveva quattordici anni. Mark ne ha scritto nel *Fibonacci Quarterly*, ma nel 1967 è morto in un incidente di moto quando era al primo anno di università.

Due matematici statunitensi, J. Smolak e T.J. Osler, hanno riportato sul *College of Mathematics Journal* (34: 58-60, 2003) una curiosità stupefacente.

Si consideri la frazione 100/89, che vale:

$$\frac{100}{89} = 1{,}12359550561\ldots$$

Come si può notare, nell'espressione decimale a secondo membro le prime cinque cifre sono i primi cinque numeri di Fibonacci.

Se ora si aggiungono due zeri al numeratore della frazione, e un 9 all'inizio e uno alla fine del denominatore, si ottiene:

$$\frac{10000}{9899} = 1{,}0102030508132134559046368\ldots$$

Qui il primo 1, seguito dalle successive nove *coppie* di cifre, forma la sequenza dei primi *dieci* numeri di Fibonacci!

Gli autori dimostrano che questa procedura, se la si ripete all'infinito, genera *tutti* i numeri di Fibonacci! Ogni passaggio produce cinque nuovi numeri di Fibonacci; così la frazione 100000/998999, se si prendono le cifre decimali a *terne*, fornisce i primi quindici numeri di Fibonacci. La frazione successiva produce i primi venti numeri della sequenza, quella ancora successiva i primi venticinque, e così via all'infinito!

Donald Knuth mi dice che in modo del tutto simile si possono generare i numeri di Tribonacci con frazioni come 1000000/989899 e 1000000000/898998999!

Sospetto che pochi matematici sappiano che la sequenza di Fibonacci può rappresentare la base per una notazione aritmetica.

Ogni intero positivo si può infatti esprimere in un modo unico come somma di un insieme di numeri di Fibonacci non consecutivi.

E sapevate che il dodicesimo numero di Fibonacci è $12^2 = 144$? Questo è l'unico quadrato, a parte 1, tra i numeri di Fibonacci; gli unici cubi sono 1 e 8.

Esiste un modo semplice per dire se un qualsiasi numero dato è un numero di Fibonacci?

Sì: un intero n è un numero di Fibonacci se e soltanto se $5n^2 + 4$ oppure $5n^2 - 4$ è un quadrato perfetto!

Potete divertirvi a provare qualche intero sulla calcolatrice. Chissà se 666 è un numero di Fibonacci? No, non lo è! Forse lo è 123? Oppure 987?

Infine ecco una strana equazione che combina la sequenza di Fibonacci con una sequenza di fattoriali* per produrre, al limite, il valore del numero di Nepero e. Come π, questo famoso numero trascendente ha il vizio di spuntare fuori nei modi più vari e inaspettati. Questa misteriosa frazione l'ho ricevuta dall'amico Owen O'Shea, che dice di averla trovata su Internet:

$$e = \frac{1 + 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{5}{4!} + \frac{8}{5!} + \frac{13}{6!} + \frac{21}{7!} + \frac{34}{8!} + \frac{55}{9!} + \ldots}{1 + 0 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} + \frac{3}{5!} + \frac{5}{6!} + \frac{8}{7!} + \frac{13}{8!} + \frac{21}{9!} + \ldots}$$

* Il *fattoriale* di un numero intero n, indicato da un punto esclamativo, è definito come il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n compreso: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$. Così per esempio $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$. [ndt]

Il genio iperspaziale

Per molti anni ho avuto il piacere di scrivere per la rivista *Isaac Asimov's Science Fiction Magazine* una rubrica in cui presentavo un enigma all'interno di un breve racconto di fantascienza. La storia che segue è apparsa nel numero del luglio 1981. A quell'epoca l'ultimo teorema di Fermat era ancora la più grande congettura irrisolta della teoria dei numeri. È stata poi provata nel 1993 da Andrew Wiles, con una dimostrazione così spaventosamente intricata che non si può proprio considerarla elegante. Chissà se un giorno qualcuno scoprirà una dimostrazione semplice e bella del teorema? Forse è registrata in quello che Paul Erdös amava chiamare «il libro di Dio», che contiene tutte le migliori dimostrazioni? Oppure esistono teoremi molto semplici, come l'ultimo di Fermat o la congettura di Goldbach, che proprio non hanno una dimostrazione elegante? Nessuno conosce la risposta.

John Collier Fletcher aveva sempre desiderato diventare una stella dell'opera. Era un uomo corpulento ma disgraziatamente cantava con voce esile, difficile da udire a teatro senza amplificazione elettronica. All'università rinunciò al suo sogno, prese un dottorato in matematica e divenne professore alla New York University. La sua specialità era la teoria dei numeri.

Per molti anni Fletcher tentò senza successo di dimostrare l'ultimo teorema di Fermat. Questo teorema afferma che l'equazione $a^n + b^n = c^n$ non ha soluzioni tra gli interi positivi se n è maggiore di 2.

Il caso di $n = 1$ è banale. Per $n = 2$ c'è un numero infinito di soluzioni, chiamate *terne pitagoriche*, tra cui la più semplice è (3,4,5): $3^2 + 4^2 = 5^2$.

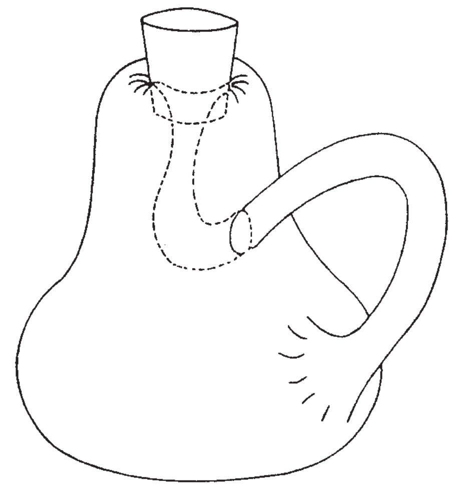
Pierre de Fermat scrisse a margine di un libro che aveva una dimostrazione meravigliosa del teorema, ma che il margine era troppo piccolo per contenerla.

Una sera d'inverno, mentre camminava nella neve fangosa per tornare al suo appartamento di scapolo, Fletcher passò davanti a un negozietto che non ricordava di avere mai visto prima. Il cartello sopra la vetrina sporca diceva: LA VECCHIA BOTTIGLIERIA DI RAY PALMER.

Su una mensola in vetrina c'erano alcune curiose bottiglie. Una attirò l'attenzione di Fletcher: sembrava quasi… ma sì, era proprio una bottiglia di Klein!

La bottiglia di Klein è una superficie chiusa senza bordi, come la superficie di una sfera. La superficie di una sfera però ha due lati, uno interno e l'altro esterno, e una formica che cammina sulla superficie esterna non può passare a quella interna, a meno di passare per un foro. La superficie di Klein invece ha un lato solo, come un nastro di Möbius: si passa dall'esterno all'interno con continuità; una formica, anche senza attraversare fori, può raggiungere qualsiasi punto di entrambi i «lati» della superficie.

Fletcher aveva sempre desiderato possedere una bottiglia di Klein da mostrare ai suoi allievi. La pesante porta del negozio cigolò in modo inquietante mentre la apriva. Da dietro una tenda sbrindellata emerse un vecchietto alto circa un metro e venti, con i capelli bianchi e occhi azzurri come l'acqua.



Un modello di bottiglia di Klein.

«È una bottiglia di Klein quella che ha in vetrina?» domandò Fletcher.

«Be', non esattamente» rispose lo gnomo, indicando l'oggetto della figura qui sopra. «È soltanto un modello grezzo. Avrà notato che il manico passa per un foro, lì dove entra nella bottiglia. Una vera bottiglia di Klein non ha fori. La superficie non si auto-interseca mai, perché il manico gira intorno passando per la quarta dimensione.»

«Lo so, lo so» disse Fletcher. «Insegno topologia alla New York University.»

Lo gnomo non parve impressionato. «In magazzino ho alcune vere bottiglie di Klein. Ma sono più costose. E possono causare guai.»

«Guai?» disse Fletcher. «E perché?»

«Perché si attorcigliano nello spazio quadridimensionale. Non si sa mai che tipo di creatura dell'iperspazio possa venire fuori quando si stappa la bottiglia. Può essere un angelo o un genio simpatico, ma può anche essere un demone malvagio. Non rida. Gliene farò vedere una.

Fletcher tenne a freno la risata – che suonava in realtà come un risolino stridulo – mentre lo gnomo scompariva dietro la tenda. Ne riemerse un attimo dopo con una bottiglia a forma di pera, alta quasi quanto lui. Sembrava fatta di un fragile vetro rosa. Era proprio una bottiglia di Klein, ma là dove il manico di solito entra dentro il foro c'era invece una sfera color bianco intenso, che brillava rilucendo come un fulmine globulare. Lo gnomo l'indicò con un'unghia bordata di nero.

«È lì che quest'affare si avvita nell'iperspazio» disse. «Naturalmente la curvatura non si vede. Ma se si lascia cadere nella bottiglia un oggetto, sparirà nella quarta dimensione e non lo si potrà più recuperare».

Fletcher rimase così affascinato che acquistò la bottiglia all'istante, anche se costava molto più di quanto avesse previsto. Arrivato a casa mise la bottiglia al centro del salotto, le si inginocchiò a fianco sul tappeto e cercò di scoprire che cosa fosse a provocare quella nuvola di luce scintillante.

Provò a toccare la nuvola, ma la mano semplicemente svaniva in una regione freddissima. Quando ritirò la mano, le dita erano così congelate che dovette tenerle per un po' sotto il rubinetto dell'acqua calda.

L'apertura in cima alla bottiglia era sigillata da un tappo di gomma nera con un diametro di una quindicina di centimetri. Spingendolo con pazienza da tutti i lati, Fletcher riuscì infine a tirarlo fuori.

Ci fu un botto accompagnato da un getto d'aria gelida, da una nube di volute di fumo viola e da uno strano odore mediorientale, che faceva pensare a un miscuglio di esalazioni di fogna e spezie aromatiche. Un enorme genio, vestito come se fosse appena uscito dalle *Mille e una notte*, si materializzò dalla nube e fece un profondo inchino.

«Sono ai tuoi ordini» disse con una voce profonda e roboante, che Fletcher gli invidiò. «Hai a disposizione i consueti tre desideri. Qual è il primo?»

Dopo essersi riavuto dalla sorpresa Fletcher disse, esitante: «Ho sempre desiderato cantare come Enrico Caruso…»

«Tu ordini» disse il genio «e io obbedisco».

Fletcher sentì un'improvvisa ondata di energia pulsare nei polmoni, mentre il torace pareva gonfiarsi. Cantò alcune note. Fantastico! L'intonazione era perfetta, il vibrato eccellente.

«Bravo!» disse il genio. «E il secondo desiderio?»

A Fletcher bastò riflettere per pochi secondi. «Vorrei una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat».

«Chiedo perdono, ma non capisco» disse il genio.

Fletcher scribacchiò rapidamente un'equazione su un pezzo di carta. «È il più grande problema irrisolto della teoria dei numeri. Se riesco a dimostrare che non ha soluzioni intere quando n è maggiore di 2, sarò più famoso di Isaac Asimov!»

Il genio guardò pensosamente l'equazione. «Non ho una grande testa per i numeri. Dovrò consultarmi con un'autorità superiore. Non te ne andare, ritornerò tra pochi minuti terrestri».

In qualche modo il genio riuscì a scivolare di nuovo dentro la bottiglia rosa. Un momento dopo ne uscì, con un altro scoppiettante getto di fumo viola dall'odore strano, e porse a Fletcher il foglio che aveva portato con sé. Sotto l'equazione, in calligrafia minuta ma leggibile, c'era una breve dimostrazione.

Fletcher la lesse con crescente imbarazzo. Eccitato com'era, aveva scritto l'equazione sbagliata! Aveva scambiato le n con a, b, e c. L'equazione era stata per così dire capovolta, in questo modo:

$$n^a + n^b = n^c$$

Il testo sul foglio dimostrava, in modo chiaro e certamente a prova di bomba, che quest'equazione non ha soluzioni quando n è più grande di 2. Sapreste dire come lo si può dimostrare?

Risposta

Devo questa dimostrazione a Douglas Hofstadter, che ha presentato la versione «capovolta» dell'ultimo teorema di Fermat nel suo libro *Gödel, Escher, Bach*. Lì il teorema non viene provato perché, dice il testo, la meravigliosa dimostrazione «è così piccola che sarebbe praticamente invisibile, se scritta nel margine».

L'equazione $n^a + n^b = n^c$ ovviamente non ha soluzioni intere se $n = 1$, perché in tal caso si riduce alla falsa uguaglianza $1 + 1 = 1$. Ha invece un'infinità di soluzioni se $n = 2$: basta scegliere $a = b$ e $c = a + 1$. Per esempio: $2^2 + 2^2 = 2^3$.

Consideriamo ora il caso di n maggiore di 2. Useremo il fatto che, se n è la base di un sistema numerico, allora in quel sistema tutte le potenze di n sono rappresentate da un 1 seguito da una serie di 0. Nel nostro sistema decimale, per esempio, le potenze di 10 hanno la forma 10, 100, 1000, 10000 e così via. E lo stesso vale nel sistema binario: le potenze di 2, base del sistema, hanno la forma 10, 100, 1000, 10000 e così via.

Nell'equazione capovolta ci sono due casi da considerare: $a = b$ oppure a diverso da b.

Se $a = b$ le due potenze uguali di n, espresse in base n, si scriveranno entrambe come 1 seguito da a zeri. La loro somma sarà dunque pari a 2 seguito da a zeri, un numero che ovviamente non può essere una potenza di n.

Se invece a è diverso da b, ciascuna delle due potenze si scriverà in base n come un 1 seguito da una fila di 0, ma ora le due file di 0 avranno lunghezza diversa. La somma perciò avrà la forma di un 1 seguito da una serie di 0 che contiene in qualche posizione un altro 1. E di nuovo, un numero che ha questa forma non può essere una potenza di n.

I due casi considerati esauriscono tutte le possibilità, perciò abbiamo dimostrato il teorema per assurdo. (Forse vi domanderete perché la dimostrazione non valga nel caso della notazione binaria, ossia $n = 2$, quando $a = b$; per scoprirlo basta sperimentare con qualche esempio numerico).

Mentre Fletcher spiegava il suo errore, il genio lo guardava torvo. «Ho fornito ciò che hai domandato» disse. «Perciò dobbiamo considerare soddisfatto il tuo secondo desiderio. Qual è il terzo?»

La nuova voce stentorea di Fletcher rimbombò: «Desidero una dimostrazione del fatto che *questa equazione qui* non ha soluzioni quando *n* è maggiore di 2!» E questa volta scrisse correttamente la formula di Fermat.

«Tu ordini» disse il genio «e io obbedisco. Ma devo di nuovo controllare con i miei superiori.»

Il genio scivolò via dentro la bottiglia. Passarono diversi minuti. Fletcher non resistette, voleva provare ancora la sua nuova voce. Cantò un'aria famosa del *Rigoletto*, che termina con un do di petto. Buttò fuori la nota con tutta la potenza polmonare che aveva.

La bottiglia si frantumò, andando in mille pezzi.

Ovviamente Fletcher non vide mai più il genio. Non riuscì nemmeno a localizzare la vecchia bottiglieria: sembrava svanita nel nulla, come il genio.

Fletcher cambiò nome e lavoro. Forse avrete sentito nominare John Luciano Pavoletti, che si dice sia stato il più grande tenore dopo Caruso.

Satana e la mela

Ho sempre trovato affascinanti i paradossi logici. Questa è una delle ragioni per cui sono così affezionato alle opere di Lewis Carroll – specialmente i due libri di Alice e il romanzo *Sylvie e Bruno* – dove le contraddizioni logiche abbondano. Il brano che segue è un altro degli enigmi che ho scritto per l'*Isaac Asimov's Science Fiction Magazine*, dove è apparso nel numero del gennaio 1985.

Recentemente mi è capitato di passare qualche settimana a San Francisco. Un giorno, mentre stavo finendo di pranzare al Caffè Puccini di North Beach – uno dei posti frequentati da alcuni tra i miei amici più eccentrici della Silicon Valley – un'attraente giovane donna dai capelli rossi si è avvicinata al tavolo a cui sedevo da solo.

«Lei è Martin Gardner?» ha domandato.

«Sono io» ho risposto, mettendo via il giornale che stavo leggendo.

«Posso sedermi?»

«Ma certamente.»

Un amico comune, mi ha detto, le aveva indicato dove trovarmi. Era abbonata all'*Isaac Asimov's Science Fiction Magazine*, e leggeva ogni mese la mia rubrica di enigmi. Aveva una strana storia da raccontarmi. Era sicura che avrei potuto farne uso nella mia rubrica.