David Acheson

VIAGGIO NEL CALCOLO INFINITESIMALE

Un'avventura matematica
dalla mela di Newton alla chitarra elettrica

ZANICHELLI

Titolo originale: *The calculus story: a mathematical adventure*

www.zanichelli.it

Traduzione: Luisa Doplicher

Realizzazione editoriale:
– Collana ideata da: Federico Tibone e Lisa Vozza
– Coordinamento editoriale: Elena Bacchilega, Lucia Sanna Bissani
– Redazione: Fabio Bettani, Marinella Lombardi
– Collaborazione redazionale: Veronica Vannini
– Progetto grafico: Falcinelli & Co.
– Impaginazione: Francesca Ponti
– Composizione delle formule: Nuova Monograf snc, Bologna

Copertina:
– Progetto grafico: Falcinelli & Co.
– Artwork: Falcinelli & Co.
– Impaginazione: Francesca Ponti
– Immagine di copertina: matdesign24/iStock Photos

Prima edizione: ottobre 2022

Ristampa:
5 4 3 2 1 2022 2023 2024 2025 2026

Stampa: Grafica Ragno
Via Lombardia 25, 40064 Tolara di Sotto - Ozzano Emilia (Bologna)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

INDICE

CAPITOLO DICIANNOVESIMO

Il calcolo infinitesimale e la chitarra elettrica

Le equazioni differenziali sono la chiave per capire il mondo fisico, ma spesso hanno un aspetto abbastanza diverso da tutto ciò che abbiamo visto finora.

Il motivo è semplicemente che, fin troppo spesso, la quantità che vogliamo determinare dipende da *più di una variabile*.

Per esempio, se pizzicate la corda di una chitarra, ovviamente lo spostamento y della corda dipende non soltanto dal tempo t, ma anche dalla distanza x da un estremo (figura 83 a pagina seguente).

Quindi y è una funzione di due variabili, t e x. Occorre una forma più sofisticata di calcolo infinitesimale, che sfrutta oggetti chiamati *derivate parziali*:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial y}{\partial x}.$$

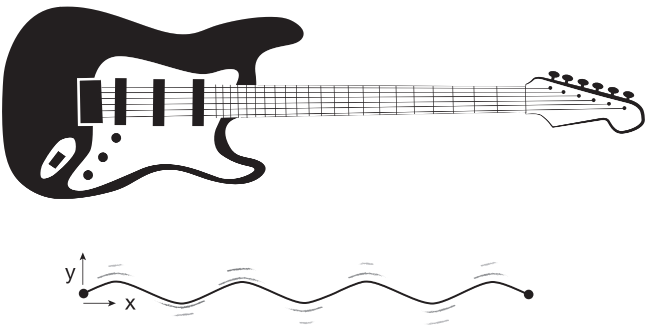


Figura 83. Vibrazioni di una corda della chitarra.

La prima di queste derivate è semplicemente la rapidità di variazione di y rispetto a t per un valore fissato di x, quindi è la velocità con cui la corda vibra in quel punto specifico.

In maniera simile, $\partial y/\partial x$ è la variazione di y rispetto a x a un tempo t fissato, cioè rappresenta l'inclinazione della corda in quel momento specifico, come se scattassimo un'«istantanea».

La notazione appena diversa, «∂», che somiglia a una «d» arricciata, serve semplicemente a ricordarci che ora stiamo differenziando una funzione di più variabili.

L'equazione d'onda

Immaginate che la corda di una chitarra abbia tensione T e massa per unità di lunghezza ρ. Si trova allora che lo spostamento y è governato da un'*equazione differenziale alle derivate parziali* (figura 84).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Figura 84. L'equazione differenziale alle derivate parziali per la corda vibrante.

Qui $\partial^2 y/\partial t^2$ è l'accelerazione su un piccolo tratto di corda; il membro destro è la forza (per unità di massa) che provoca quell'accelerazione.

Per capire come mai la forza abbia quella forma, immaginate di scattare un'istantanea di quel piccolo tratto di corda. Se $\partial^2 y/\partial x^2 > 0$, in quel momento l'inclinazione della corda $\partial^2 y/\partial x$ sta aumentando con x, cioè quel particolare tratto della corda si incurva leggermente «all'insù» (figura 85).

La trazione all'insù della parte destra della corda è allora un po' maggiore della trazione all'ingiù subita dalla parte sinistra; il risultato netto è una

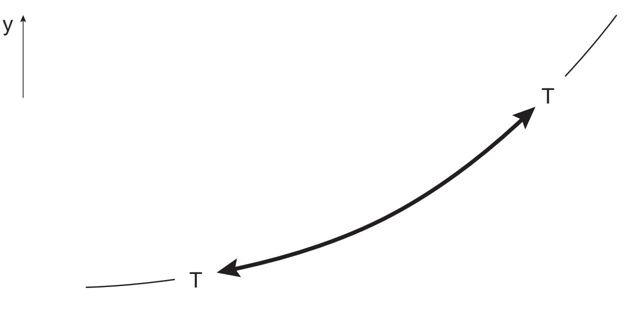


Figura 85. Le forze su un tratto minuscolo della corda.

forza diretta verso l'alto, cioè nella direzione delle y positive.

In breve, è la curvatura di quel piccolo tratto di corda che dà luogo alla forza netta osservata nell'equazione differenziale alle derivate parziali.

Questa cosiddetta *equazione d'onda* fu derivata e risolta nel 1747 da Jean Le Rond D'Alembert. La caratteristica più notevole della soluzione è che presenta *onde viaggianti*, cioè perturbazioni che si propagano lungo la corda, nella direzione x, senza cambiare forma (figura 86).

Inoltre la velocità con cui si spostano è $\sqrt{T/\rho}$, cioè aumenta al crescere della tensione T della corda. Di fatto sulle corde della chitarra le onde vanno così veloci che è quasi impossibile distinguerle, ma sono abbastanza evidenti su una corda meno tesa, come per esempio quella del bucato, dove in genere T/ρ è molto minore.

Corde vibranti

Per capire i suoni della corda della chitarra, però, dobbiamo esaminare alcune soluzioni abbastanza diverse.

Immaginate quindi una corda lunga l ed estesa tra $x = 0$ e $x = l$, dove è fissata, in modo che in questi punti sia $y = 0$.

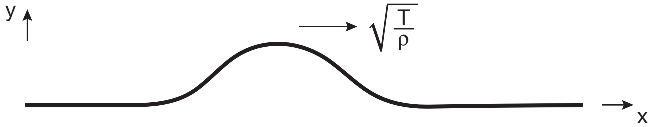


Figura 86. Un'onda viaggiante.

Si trova allora che la soluzione più semplice dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ha la forma

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t$$

dove ω è una costante che esamineremo a breve.

Così, tutta la corda vibra con lo stesso periodo $2\pi/\omega$, ma parti diverse della corda, corrispondenti a valori diversi di x, subiscono vibrazioni di entità diversa (figura 87).

In particolare, y è sempre 0 ai due estremi $x = 0$ e $x = l$, come dev'essere, perché $\sin 0 = \sin \pi = 0$ (vedere la figura 70).

Questo è il cosiddetto «modo fondamentale», in cui a ogni istante tutte le parti della corda si muovono nella stessa direzione.

La *frequenza* di questo modo, cioè il numero di vibrazioni nell'unità di tempo, è

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,.$$

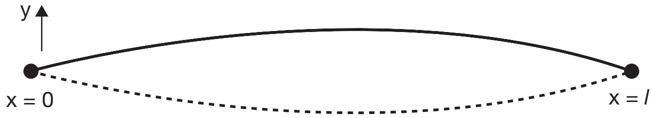


Figura 87. Il modo fondamentale.

Si ottiene subito questo risultato se sostituiamo l'espressione di y nell'equazione differenziale, in maniera molto simile a quanto visto per il problema del pendolo nel capitolo diciottesimo.

In genere, per ogni specifica corda di chitarra, la tensione T e la densità ρ sono fissate; qui la caratteristica più interessante è perciò che la frequenza della vibrazione è proporzionale a $1/l$.

È per questo che premendo sui tasti, cioè accorciando la corda, si produce una nota più alta.

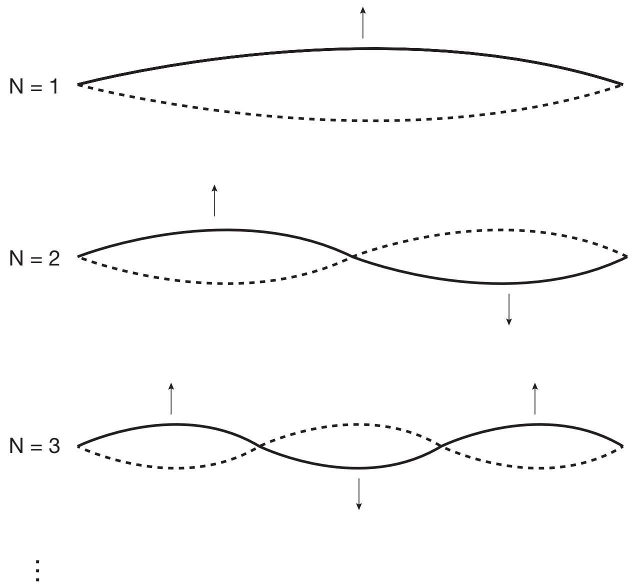
In particolare, premendo sul dodicesimo tasto si *dimezza* la lunghezza l della corda, quindi si raddoppia la frequenza fondamentale: di conseguenza la nota risultante è più alta di un'ottava rispetto alla corda libera.

Si dà però il caso che il modo fondamentale sia soltanto il primo di un'intera sequenza (figura 88).

La cosa più notevole è che la frequenza di vibrazione di ogni modo è un multiplo intero N della frequenza fondamentale.

Di nuovo, ciò deriva dall'equazione differenziale stessa, benché siano cruciali anche le condizioni ai due estremi. Il motivo è che, per questi modi più alti, y è proporzionale a sin $N\pi x/l$, quantità che è nulla all'estremo destro, $x = l$, soltanto se N è un numero intero (figura 70).

In particolare, allora, il modo $N = 2$, in cui le due metà della corda si muovono in direzioni opposte a ogni istante, vibra a frequenza doppia rispetto al modo fondamentale, quindi il suono è più alto di un'ottava.



$$\text{Frequenza} = \frac{N}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Figura 88. Modi di vibrazione.

In pratica, quando si pizzica la corda di una chitarra, la risposta è spesso un miscuglio complicato di *tutti* questi vari modi. Il fondamentale, $N = 1$, tende a dominare, ma è possibile dare più enfasi alle armoniche superiori pizzicando la corda vicino a un estremo; è per questo che la nota risultante ha allora un suono più tagliente e meno morbido.

Inoltre, ci sono varie tecniche più sofisticate, ben note ai chitarristi rock, per sopprimere alcuni modi di vibrazione ed enfatizzarne altri. Molti «trucchi» del genere sfruttano il fatto che i modi superiori presentano i *nodi*, cioè punti precisi lungo la corda in cui lo spostamento è nullo.

Spesso, quindi, si ottiene lo specifico modo cercato, con un po' di fortuna, creando artificialmente un nodo adatto.