

David Acheson

VIAGGIO NEL CALCOLO INFINITESIMALE

Un'avventura matematica
dalla mela di Newton alla chitarra elettrica

ZANICHELLI

Titolo originale: *The calculus story: a mathematical adventure*

Copyright © David Acheson 2017

The calculus story: a mathematical adventure was originally published in English in 2017. This translation is published by arrangement with Oxford University Press. Zanichelli editore S.p.A. is solely responsible for this translation from the original work and Oxford University Press shall have no liability for any errors, omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation or for any losses caused by reliance thereon.

Copyright © 2022 Zanichelli editore S.p.A., Bologna [42033]

www.zanichelli.it

Traduzione: Luisa Doplicher

Diritti riservati

I diritti di pubblicazione, riproduzione, comunicazione, distribuzione, trascrizione, traduzione, noleggio, prestito, esecuzione, elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale e di adattamento totale o parziale su supporti di qualsiasi tipo e con qualsiasi mezzo (comprese le copie digitali e fotostatiche), sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Fotocopie e permessi di riproduzione

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E. del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E.

Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionali, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.

Le richieste vanno inoltrate a

CLEARedi Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali
Corso di Porta Romana, n. 108
20122 Milano
e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, anche oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, né le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche. Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei e archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore. Per permessi di riproduzione, diversi dalle fotocopie rivolgersi a ufficiocontratti@zanichelli.it

Licenze per riassunto, citazione e riproduzione parziale a uso didattico con mezzi digitali

La citazione, la riproduzione e il riassunto, se fatti con mezzi digitali, sono consentiti (art. 70 bis legge sul diritto d'autore), limitatamente a brani o parti di opera,

- esclusivamente per finalità illustrative a uso didattico, nei limiti di quanto giustificato dallo scopo non commerciale perseguito.
(La finalità illustrativa si consegue con esempi, chiarimenti, commenti, spiegazioni, domande, nel corso di una lezione);
 - sotto la responsabilità di un istituto di istruzione, nei suoi locali o in altro luogo o in un ambiente elettronico sicuro, accessibili solo al personale docente di tale istituto e agli alunni o studenti iscritti al corso di studi in cui le parti di opere sono utilizzate;
 - a condizione che, per i materiali educativi, non siano disponibili sul mercato licenze volontarie che autorizzano tali usi.
- Zanichelli offre al mercato due tipi di licenze di durata limitata all'anno scolastico in cui le licenze sono concesse:
- licenze gratuite per la riproduzione, citazione o riassunto di una parte di opera non superiore al 5%. Non è consentito superare tale limite del 5% attraverso una pluralità di licenze gratuite.
 - licenze a pagamento per la riproduzione, citazione, riassunto parziale ma superiore al 5% e comunque inferiore al 40% dell'opera.

Per usufruire di tali licenze occorre seguire le istruzioni su www.zanichelli.it/licenzeeducative

L'autorizzazione è strettamente riservata all'istituto educativo licenziatario e non è trasferibile in alcun modo e a qualsiasi titolo.

Diritto di TDM

L'estrazione di dati da questa opera o da parti di essa e le attività connesse non sono consentite, salvi i casi di utilizzazioni libere ammessi dalla legge. L'editore può concedere una licenza. La richiesta va indirizzata a tdm@zanichelli.it

File per sintesi vocale

L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader. Le informazioni su come ottenere i file sono su www.zanichelli.it/scuola/bisogni-educativi-speciali

Grazie a chi ci segnala gli errori

Segnalate gli errori e le proposte di correzione su www.zanichelli.it/correzioni. Controlleremo e inseriremo le eventuali correzioni nelle ristampe del libro. Nello stesso sito troverete anche l'errata corrige, con l'elenco degli errori e delle correzioni.

Realizzazione editoriale:

- Collana ideata da: Federico Tibone e Lisa Vozza
- Coordinamento editoriale: Elena Bacchilega, Lucia Sanna Bissani
- Redazione: Fabio Bettani, Marinella Lombardi
- Collaborazione redazionale: Veronica Vannini
- Progetto grafico: Falcinelli & Co.
- Impaginazione: Francesca Ponti
- Composizione delle formule: Nuova Monograf snc, Bologna

Copertina:

- Progetto grafico: Falcinelli & Co.
- Artwork: Falcinelli & Co.
- Impaginazione: Francesca Ponti
- Immagine di copertina: [matdesign24/iStock Photos](https://www.gettyimages.com)

Prima edizione: ottobre 2022

Ristampa:

5 4 3 2 1 2022 2023 2024 2025 2026

Stampa: Grafica Ragno

Via Lombardia 25, 40064 Tolara di Sotto - Ozzano Emilia (Bologna)

per conto di Zanichelli editore S.p.A.

Via Imerio 34, 40126 Bologna

INDICE

	Introduzione	7
	Il viaggio comincia dalla mela di Newton	
1.	Lo spirito della matematica	13
	I matematici non si chiedono solo che cosa è vero, ma perché lo è	
2.	L'infinito	21
	Sulla via per il calcolo infinitesimale, impariamo i concetti di infinito e di limite	
3.	Qual è la pendenza delle curve?	29
	Il calcolo infinitesimale riguarda la rapidità con cui cambiano le cose: quest'idea è legata alla pendenza delle curve	
4.	La differenziazione	35
	Anche il concetto di derivata è essenziale per capire e usare il calcolo infinitesimale	
5.	Il più grande e il più piccolo	43
	Qual è il punto migliore per osservare la colonna di Nelson? Risolvere i problemi di ottimizzazione	
6.	Giochi con l'infinito	49
	Da Archimede a Keplero: come calcolare l'area (o il volume) di un oggetto dalla forma irregolare	

7.	L'area e il volume Dalla differenziazione all'integrazione	57
8.	Le serie infinite Per capire la differenza tra serie infinite convergenti e divergenti, cominciamo a impilare qualche scatola...	67
9.	«Un diletto eccessivo» I primi passi di Newton con il calcolo infinitesimale	75
10.	La dinamica Perché e come si muovono le cose	81
11.	Newton e il moto planetario L'astronomo Edmund Halley lo ispira a scrivere i <i>Principi</i> , ma intanto il rivale Leibniz si affaccia all'orizzonte...	89
12.	L'articolo di Leibniz del 1684 Il rivale di Newton pubblica un articolo dove introduce la differenziazione	97
13.	«Un enigma» L'articolo di Leibniz non è semplice da comprendere, e i dotti dell'epoca si mettono alla prova	107
14.	Chi ha inventato il calcolo infinitesimale? La disputa tra Newton e Leibniz per la paternità della scoperta	115
15.	Girare in tondo In matematica, alcune funzioni oscillano: il calcolo infinitesimale ci dice quanto rapidamente lo fanno	123
16.	Pi greco e i numeri dispari Un legame straordinario tra il numero π , che riguarda esclusivamente i cerchi, e i numeri dispari	131
17.	Il calcolo infinitesimale sotto attacco Il calcolo infinitesimale dopo la morte di Leibniz e Newton	137
18.	Le equazioni differenziali La matematica che descrive le oscillazioni di un pendolo	145
19.	Il calcolo infinitesimale e la chitarra elettrica La matematica degli strumenti a corda	153

20. Il migliore dei mondi possibili?	161
Approfondiamo i problemi di ottimizzazione	
21. Il misterioso numero e	169
Le applicazioni del numero di Nepero, dalle diffusione delle malattie ai logaritmi	
22. Come fare una serie	175
Un modo più semplice di esprimere le serie infinite con le funzioni	
23. Il calcolo infinitesimale e i numeri immaginari	181
Numeri speciali per risolvere problemi difficili, come quelli aerodinamici	
24. La rivincita dell'infinito	187
Nel corso dell'Ottocento i matematici si sforzarono di dare al calcolo infinitesimale fondamenti più rigorosi	
25. Che cosa <i>sono</i> esattamente i limiti?	195
Alla ricerca di una definizione rigorosa	
26. Le equazioni della natura	201
Il calcolo infinitesimale per scoprire il mondo naturale	
27. Dal calcolo infinitesimale al caos	209
Grazie ai computer, possiamo studiare anche i sistemi caotici	
Le fonti di questo libro	219
Indice analitico	221

CAPITOLO DICIANNOVESIMO

Il calcolo infinitesimale e la chitarra elettrica

Le equazioni differenziali sono la chiave per capire il mondo fisico, ma spesso hanno un aspetto abbastanza diverso da tutto ciò che abbiamo visto finora.

Il motivo è semplicemente che, fin troppo spesso, la quantità che vogliamo determinare dipende da *più di una variabile*.

Per esempio, se pizzicate la corda di una chitarra, ovviamente lo spostamento y della corda dipende non soltanto dal tempo t , ma anche dalla distanza x da un estremo (figura 83 a pagina seguente).

Quindi y è una funzione di due variabili, t e x . Occorre una forma più sofisticata di calcolo infinitesimale, che sfrutta oggetti chiamati *derivate parziali*:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial y}{\partial x}.$$

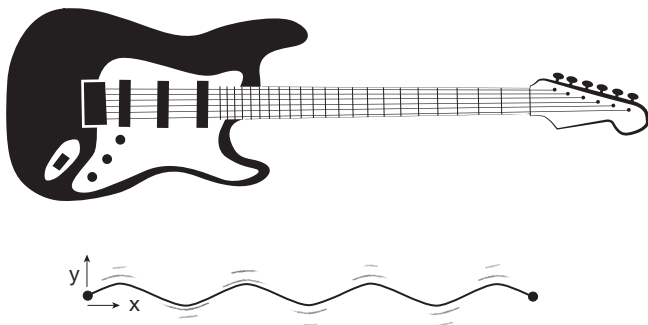


Figura 83. Vibrazioni di una corda della chitarra.

La prima di queste derivate è semplicemente la rapidità di variazione di y rispetto a t per un valore fissato di x , quindi è la velocità con cui la corda vibra in quel punto specifico.

In maniera simile, $\partial y / \partial x$ è la variazione di y rispetto a x a un tempo t fissato, cioè rappresenta l'inclinazione della corda in quel momento specifico, come se scattassimo un'«istantanea».

La notazione appena diversa, « ∂ », che somiglia a una «d» arricciata, serve semplicemente a ricordarci che ora stiamo differenziando una funzione di più variabili.

L'equazione d'onda

Immaginate che la corda di una chitarra abbia tensione T e massa per unità di lunghezza ρ . Si trova allora che lo spostamento y è governato da un'equazione differenziale alle derivate parziali (figura 84).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Figura 84. L'equazione differenziale alle derivate parziali per la corda vibrante.

Qui $\partial^2 y / \partial t^2$ è l'accelerazione su un piccolo tratto di corda; il membro destro è la forza (per unità di massa) che provoca quell'accelerazione.

Per capire come mai la forza abbia quella forma, immaginate di scattare un'istantanea di quel piccolo tratto di corda. Se $\partial^2 y / \partial x^2 > 0$, in quel momento l'inclinazione della corda $\partial y / \partial x$ sta aumentando con x , cioè quel particolare tratto della corda si incurva leggermente «all'insù» (figura 85).

La trazione all'insù della parte destra della corda è allora un po' maggiore della trazione all'ingiù subita dalla parte sinistra; il risultato netto è una

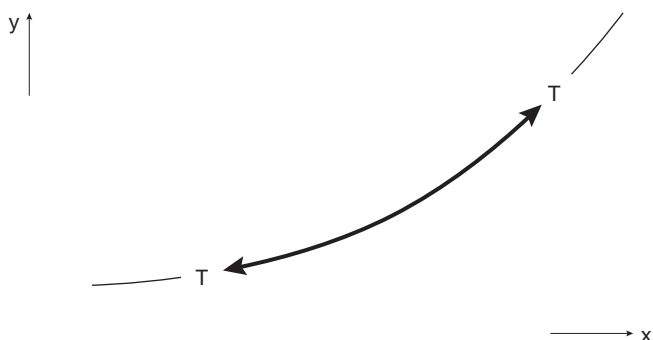


Figura 85. Le forze su un tratto minuscolo della corda.

forza diretta verso l'alto, cioè nella direzione delle y positive.

In breve, è la curvatura di quel piccolo tratto di corda che dà luogo alla forza netta osservata nell'equazione differenziale alle derivate parziali.

Questa cosiddetta *equazione d'onda* fu derivata e risolta nel 1747 da Jean Le Rond D'Alembert. La caratteristica più notevole della soluzione è che presenta *onde viaggianti*, cioè perturbazioni che si propagano lungo la corda, nella direzione x , senza cambiare forma (figura 86).

Inoltre la velocità con cui si spostano è $\sqrt{T/\rho}$, cioè aumenta al crescere della tensione T della corda. Di fatto sulle corde della chitarra le onde vanno così veloci che è quasi impossibile distinguerle, ma sono abbastanza evidenti su una corda meno tesa, come per esempio quella del bucato, dove in genere T/ρ è molto minore.

Corde vibranti

Per capire i suoni della corda della chitarra, però, dobbiamo esaminare alcune soluzioni abbastanza diverse.

Immaginate quindi una corda lunga l ed estesa tra $x = 0$ e $x = l$, dove è fissata, in modo che in questi punti sia $y = 0$.

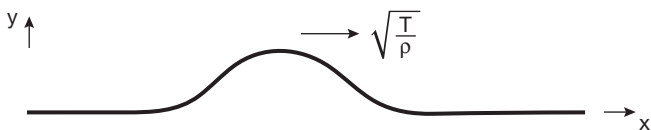


Figura 86. Un'onda viaggiante.

Si trova allora che la soluzione più semplice dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ha la forma

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t$$

dove ω è una costante che esamineremo a breve.

Così, tutta la corda vibra con lo stesso periodo $2\pi/\omega$, ma parti diverse della corda, corrispondenti a valori diversi di x , subiscono vibrazioni di entità diversa (figura 87).

In particolare, y è sempre 0 ai due estremi $x = 0$ e $x = l$, come dev'essere, perché $\sin 0 = \sin \pi = 0$ (vedere la figura 70).

Questo è il cosiddetto «modo fondamentale», in cui a ogni istante tutte le parti della corda si muovono nella stessa direzione.

La *frequenza* di questo modo, cioè il numero di vibrazioni nell'unità di tempo, è

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$



Figura 87. Il modo fondamentale.

Si ottiene subito questo risultato se sostituiamo l'espressione di y nell'equazione differenziale, in maniera molto simile a quanto visto per il problema del pendolo nel capitolo diciottesimo.

In genere, per ogni specifica corda di chitarra, la tensione T e la densità ρ sono fissate; qui la caratteristica più interessante è perciò che la frequenza della vibrazione è proporzionale a $1/l$.

È per questo che premendo sui tasti, cioè accorciando la corda, si produce una nota più alta.

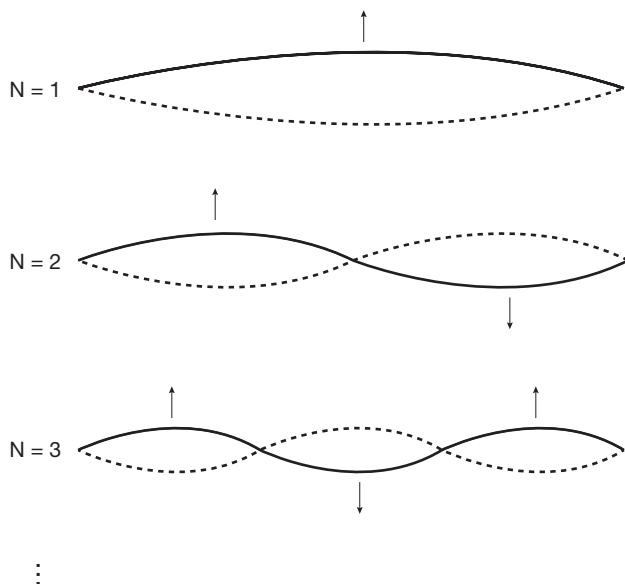
In particolare, premendo sul dodicesimo tasto si *dimezza* la lunghezza l della corda, quindi si raddoppia la frequenza fondamentale: di conseguenza la nota risultante è più alta di un'ottava rispetto alla corda libera.

Si dà però il caso che il modo fondamentale sia soltanto il primo di un'intera sequenza (figura 88).

La cosa più notevole è che la frequenza di vibrazione di ogni modo è un multiplo intero N della frequenza fondamentale.

Di nuovo, ciò deriva dall'equazione differenziale stessa, benché siano cruciali anche le condizioni ai due estremi. Il motivo è che, per questi modi più alti, y è proporzionale a $\sin N\pi x/l$, quantità che è nulla all'estremo destro, $x = l$, soltanto se N è un numero intero (figura 70).

In particolare, allora, il modo $N = 2$, in cui le due metà della corda si muovono in direzioni opposte a ogni istante, vibra a frequenza doppia rispetto al modo fondamentale, quindi il suono è più alto di un'ottava.



$$\text{Frequenza} = \frac{N}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Figura 88. Modi di vibrazione.

In pratica, quando si pizzica la corda di una chitarra, la risposta è spesso un miscuglio complicato di *tutti* questi vari modi. Il fondamentale, $N = 1$, tende a dominare, ma è possibile dare più enfasi alle armoniche superiori pizzicando la corda vicino a un estremo; è per questo che la nota risultante ha allora un suono più tagliente e meno morbido.

Inoltre, ci sono varie tecniche più sofisticate, ben note ai chitarristi rock, per sopprimere alcuni modi di vibrazione ed enfatizzarne altri. Molti

«trucchi» del genere sfruttano il fatto che i modi superiori presentano i *nodi*, cioè punti precisi lungo la corda in cui lo spostamento è nullo.

Spesso, quindi, si ottiene lo specifico modo cercato, con un po' di fortuna, creando artificialmente un nodo adatto.