Lawrence Weinstein
John A. Adam

Più o meno quanto?

L'arte di fare stime sul mondo

Traduzione di Luisa Doplicher

Chiavi di lettura a cura di
Federico Tibone e Lisa Vozza

CHIAVI DI LETTURA ZANICHELLI

indice

A mia moglie Carol e ai miei figli Lee e Rachel, che sono comprensivi quando mi metto a guardare nel vuoto e incomincio a borbottare esponenti. [LW]

A quattro cari e meravigliosi non-matematici, mia moglie Susan e i miei figli Rachel, Matthew e Lindsay; e ultimo ma non meno importante, benché sia ancora molto piccolo, a mio nipote John Mark, con l'augurio che un giorno arrivi ad amare i numeri quanto li amo io! [JAA]

Prefazione

Quanto sono grandi davvero le cose?

Siamo continuamente bombardati da numeri. Spesso li usano per spaventarci: «Quest'anno i morti in montagna sono raddoppiati!» oppure «Si potrebbero salvare decine di vite umane rendendo obbligatori i seggiolini per bambini anche sugli aerei!».

A volte se ne servono per invogliarci: «Il montepremi del Super-lotto questa settimana è arrivato a cento milioni di euro!».

Di certo sono necessari per capire il mondo che ci circonda: «L'italiano medio produce quasi 3 metri cubi di spazzatura all'anno!» oppure «Una centrale nucleare produce tonnellate di scorie altamente radioattive!».

Per interpretare questi numeri, spesso confusi e a volte contraddittori, bastano due semplici abilità: (1) comprendere il significato dei grandi numeri e (2) saper fare stime approssimate e sensate basandosi soltanto su pochi fatti essenziali.

Nelle prossime pagine imparerete ad acquisire queste abilità; ciò vi aiuterà a capire meglio tanti aspetti del mondo e ad accorgervi più facilmente se qualcuno – per esempio un politico o un sedicente scienziato – cita dati numerici privi di senso.

Queste abilità potrebbero anche aiutarvi nella vostra carriera. Molte aziende prestigiose nei colloqui di lavoro usano domande che richiedono di fare stime approssimate, per valutare l'intelligenza e l'elasticità mentale dei candidati.

Ditte informatiche, consulenti aziendali, banche d'affari (per esempio Microsoft, Goldman Sachs e Smith Barney) fanno domande come «Che dimensioni ha il mercato cinese dei pannolini usa e getta?», «Quante palline da golf ci vogliono per riempire un Boeing 747?» o «Quanti sono gli accordatori di pianoforte in tutto il mondo?».

Queste domande sono un buon test della capacità dei candidati di trovare una risposta su due piedi, applicando le loro abilità matematiche ai problemi del mondo reale.

Questi problemi sono spesso chiamati *problemi di Fermi*, in onore del leggendario fisico che si divertiva a crearli e risolverli. A quanto pare durante il primo test della bomba atomica Fermi lasciò cadere alcuni pezzettini di carta durante il passaggio dell'onda d'urto, e stimò la potenza dell'esplosione osservando il moto dei pezzettini di carta in caduta.

In questo libro vi aiuteremo a sviluppare la capacità di fare stime praticamente su tutto, dallo spazio che serve per una discarica di rifiuti al numero di persone che in questo momento si stanno mettendo le dita nel naso.

Poiché non c'è un unico metodo corretto per analizzare questi problemi, indicheremo alcuni dei modi per arrivare alla risposta giusta.

Inizieremo con due brevi capitoli su come fare stime e maneggiare grandi numeri, quindi procederemo con la parte centrale del libro: tanti problemi interessanti (con alcuni suggerimenti, se li volete usare) seguiti dalle risposte alla fine del libro.

I problemi sono suddivisi in capitoli dedicati a uno specifico argomento, come energia e ambiente, trasporti e rischi. Ogni capitolo inizia con problemi semplici e prosegue con altri di difficoltà crescente.

I capitoli dal 6 al 9 trattano l'energia nelle sue varie forme; inizieremo con le passeggiate in montagna e proseguiremo confrontando i continenti alla deriva, la benzina, le pile elettriche, il Sole, i criceti, i mulini a vento e l'uranio.

I problemi coprono un'ampia gamma di fenomeni, da quelli semplici ai più complessi, dalle curiosità alle questioni serie. Troveremo la risposta a molte domande affascinanti, come per esempio:

- Se tutti gli esseri umani del mondo venissero radunati in uno stesso luogo, quanto spazio occuperebbero?
- Quante batterie occorrerebbero per sostituire il serbatoio di benzina della vostra auto?
- Sarebbe davvero possibile per l'Uomo Ragno fermare un convoglio della metropolitana?
- Quante scorie producono ogni anno le centrali nucleari e quelle a carbone?
- Quanto costa davvero guidare un'auto?
- Ha più potenza per kilogrammo il Sole o un criceto?
- Quanto terreno agricolo in più servirebbe se sostituissimo la benzina con etanolo estratto dai cereali?

Per rispondere a queste domande basta essere disposti a ragionare e non aver paura dei grandi numeri. Nel capitolo 2 vi ricorderemo le poche nozioni ed equazioni scientifiche che servono. Rimarrete stupiti scoprendo quante stime potete fare basandovi su ciò che sapete già.

Quello che imparerete vi tornerà poi utile per tutte le altre stime che potreste dover fare in futuro. Oh, e buona fortuna per quel colloquio di lavoro!

CAPITOLO 1

Come si risolvono i problemi

Primo metodo: trovate una risposta che vi pare ragionevolmente vicina alla soluzione. Spesso non vi servirà altro per prendere una decisione.

Per esempio la distanza tra Milano e Roma è di circa 550 kilometri: quanto si impiega per fare il viaggio in auto?

Potete stimare subito che ci vorranno tra cinque e sei ore, se la velocità media è di 100–110 km/h. Quest'informazione vi basta per decidere se fare il viaggio in auto nel fine settimana. In caso positivo consulterete carte o siti Internet e studierete nei dettagli il percorso e la durata.

In modo simile prima di entrare in un negozio di solito sapete già quanto siete disposti a spendere. Per esempio potreste pensare che è ragionevole spendere circa 100 euro per un paio di scarpe. Se le trovate a 30 euro, le comprerete subito. Se le vendono a 300 euro, lascerete subito perdere. Soltanto se il prezzo è vicino a 100 euro rifletterete se comprarle o meno.

Qui applicheremo lo stesso ragionamento: cercheremo di stimare la risposta entro un fattore dieci. Come mai un fattore dieci? Perché in genere è quel che basta per prendere una decisione.

Quando stimate la risposta a un problema, il valore trovato ricadrà in una di queste tre categorie:

1. troppo grande
2. troppo piccolo
3. ragionevole

Se la soluzione è un numero troppo piccolo o troppo grande, saprete subito che fare (per esempio comprare le scarpe o non andare in auto da Milano a Roma). Soltanto se la risposta è intermedia e plausibile varrà la pena di lavorare ancora al problema per rendere più precisa la soluzione (ma ciò non rientra negli scopi di questo libro; a noi basta aiutarvi a stimare la risposta entro un fattore dieci).

Se tutti i problemi fossero semplici come quelli che abbiamo citato, non avreste bisogno di questo libro. Ma molti problemi sono talmente complicati che è difficile escogitare subito la soluzione giusta. Dovrete allora spezzarli in quesiti più semplici, fino a quando siete in grado di stimarne la soluzione.

Secondo metodo: se non riuscite a stimare la soluzione dell'intero problema, suddividetelo in quesiti più piccoli e stimate la soluzione di ciascuno. Basterà stimare ciascuna risposta entro un fattore dieci: non può essere tanto difficile!

Spesso invece di stimare direttamente una quantità è più facile individuarne limiti superiori e inferiori. Se per esempio vogliamo stimare quanti pagliacci possano entrare in una Cinquecento, sappiamo che la risposta deve essere maggiore di 1 e minore di 100.

Potremmo fare la media aritmetica dei due estremi dell'intervallo e stimare che la risposta è 50: ma questa non è la soluzione ottimale, perché è 50 volte più grande del limite inferiore e soltanto due volte più piccola del limite superiore.

Siccome invece vogliamo che la nostra stima disti dello stesso fattore dal limite inferiore e da quello superiore, useremo la media *geometrica*.

Per trovare la media geometrica (approssimata) di due numeri qualsiasi, basta fare la media aritmetica dei coefficienti e degli esponenti*.

Nel caso dei pagliacci la media geometrica tra 1 (ossia 10^0, ricordando che qualsiasi numero elevato a zero vale 1) e 100 (ossia 10^2) è pari a 10 (10^1), perché 1 è la media aritmetica degli esponenti 0 e 2.

Notate che la media geometrica 10 è equidistante da 1 e 100, cioè si trova a un fattore 10 da entrambi i limiti, come desideravamo.

Con lo stesso procedimento si trova che la media geometrica dei numeri 2×10^{15} e 6×10^3 vale all'incirca 4×10^9 (perché $\frac{2+6}{2} = 4$ e $\frac{15+3}{2} = 9$)**.

* Esprimeremo i numeri in notazione scientifica, ossia come un coefficiente (compreso tra 1 e 9,99) moltiplicato per una potenza di dieci, ossia per 10 elevato a un numero chiamato esponente. Se questa notazione non vi è familiare, date una scorsa al capitolo 2 e poi tornate qui. Vi aspettiamo.

** Se vogliamo essere più precisi (cosa che faremo raramente in questo libro) la media geometrica di due numeri *b* e *c* è data da a = $\sqrt{bc}$. La nostra regola approssimata dà un risultato esatto per gli esponenti, mentre per i coefficienti è accurata quanto basta per i nostri scopi.

Quando la somma degli esponenti è dispari, le cose sono un poco più complicate: bisogna diminuirla di 1, in modo che sia pari, e poi moltiplicare il risultato finale per 3.

Così per esempio la media geometrica tra 1 e 1000 vale 30. Infatti la somma degli esponenti di 10^0 e 10^3 vale 3, la riduciamo a 2 prima di fare la media e infine introduciamo un coefficiente 3: il risultato allora è $3 \times 10^1 = 30$.

Primo esempio: biglietti della lotteria impilati

Ecco un esempio abbastanza semplice: ci sono 100 milioni di biglietti della lotteria* * *, quindi la probabilità di vincere il primo premio con il vostro biglietto è una su 100 milioni, ossia 10^{-8}. Nelle pubblicità delle lotterie spesso la probabilità di vittoria è citata in fondo, in corpo molto piccolo.

Se si mettessero tutti i biglietti uno sopra l'altro, quanto sarebbe alta la pila? Sarebbe più vicina a un grattacielo (100 m), a una piccola montagna (1000 m), all'Everest (10 000 m), allo spessore dell'atmosfera (10^5 m), alla lunghezza dell'Italia (10^6 m), al diametro terrestre (10^7 m) o alla distanza tra la Terra e la Luna (4×10^8 m)?

Immaginate come sarebbe difficile pescare il biglietto vincente da una pila così alta.

*** 100 milioni = 100 000 000, ossia 1 seguito da otto zeri (contateli!). In notazione scientifica lo si scrive 1×10^8 o semplicemente 10^8.

Soluzione: per risolvere il problema servono due informazioni: il numero di biglietti, pari a 10^8, e lo spessore di ciascun biglietto.

È difficile stimare in modo affidabile lo spessore di oggetti sottilissimi. Un singolo biglietto della lotteria sarà spesso 1 mm o 0,1 mm?

Cerchiamo allora di stimare lo spessore di un mazzo di biglietti, e per farlo consideriamo un generico pacco di carta. Una risma di fogli per stampanti o fotocopiatrici (500 fogli) è spessa circa 5 cm, ma quei fogli sono più sottili dei biglietti della lotteria.

Un mazzo di 52 carte da gioco è spesso circa 1 cm; probabilmente questo valore è più vicino al numero che ci serve. Quindi lo spessore di un biglietto è:

$$s = \frac{1\ \text{cm}}{52\ \text{biglietti}} = 0{,}02\ \frac{\text{cm}}{\text{biglietto}} \times \frac{1\text{m}}{10^2\ \text{cm}}$$
$$= 2 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{biglietto}}$$

Dunque lo spessore di 10^8 biglietti è:

$$S = 2 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{biglietto}} \times 10^8\ \text{biglietti} = 2 \times 10^4\ \text{m}$$

Ebbene, 2×10^4 m equivalgono a 20 kilometri: disponendo una pila simile in orizzontale, ci vorrebbero quattro o cinque ore per camminare da un estremo all'altro. In verticale la pila arriverebbe a un'altezza doppia di quella dell'Everest (10 km) e dell'altitudine a cui volano i jumbo jet.

Magari voi vi sarete basati sullo spessore della carta normale, trovando che la pila è un po' più bassa; oppure forse avrete stimato che i biglietti sono spessi 1 mm, e allora la vostra pila è un po' più alta.

Ma ha poi tanta importanza se la pila è alta 10 km oppure 50 km?

In ogni caso la probabilità di pescare il biglietto vincente da una pila simile è irrisoria.

Secondo esempio: in volo sull'Italia

Questi problemi sono divertenti sia perché non stiamo cercando una risposta esatta, sia perché ci sono molte maniere diverse di stimare la risposta.

Ecco un problema un poco più difficile, con diverse possibili soluzioni.

Quanti passeggeri volano in Italia ogni anno?

Possiamo stimare la risposta a partire dall'alto oppure dal basso, cioè partendo dalla popolazione italiana oppure dal numero di aeroporti.

Soluzione n. 1: iniziamo con la popolazione italiana, che è pari a 6×10^7 di persone (questo è un numero che vi servirà per risolvere molti problemi: annotatelo sul palmo di una mano!), e stimiamo quante volte all'anno ogni italiano prende l'aereo.

Molti italiani non volano mai; una minoranza vola con grande frequenza. Diciamo che in media ogni italiano fa un viaggio all'anno, cioè due voli, e aumentiamo la stima a 3 voli/anno per tenere conto dei turisti stranieri.

In conclusione il numero totale di voli all'anno è:

$$N = 6 \times 10^7 \text{ persone} \times 3 \text{ voli/persona-anno}$$
$$= 2 \times 10^8 \text{ passeggeri/anno}$$

Soluzione n. 2: iniziamo dal numero di aeroporti e stimiamo il numero di voli per aeroporto e di passeggeri per volo. In media c'è un aeroporto abbastanza grande in ogni regione, quindi 20 in tutta Italia.

In ogni aeroporto transita al massimo un volo ogni due minuti, cioè 30 voli all'ora e 500 in un giorno di 16 ore; nella maggior parte degli aeroporti i voli saranno molti di meno, diciamo 100 al giorno in media.

Ogni aereo può portare fra 50 e 250 passeggeri, quindi abbiamo circa:

$$N = 20 \text{ aeroporti} \times \frac{100 \text{ voli}}{\text{aeroporto-giorno}} \times \frac{100 \text{ persone}}{\text{volo}}$$
$$\times \frac{365 \text{ giorni}}{\text{anno}} = 7 \times 10^7 \text{ passeggeri all'anno}$$

Il numero effettivo dei passeggeri transitati negli aeroporti italiani nel 2008 è stato pari a $1{,}3 \times 10^8$; dunque le nostre due soluzioni non sono male: entrambe approssimano la realtà (una per eccesso, l'altra per difetto) entro un fattore due.

Terzo esempio: gli accordatori di pianoforte

Ora proviamo un problema più difficile: quanti accordatori di pianoforte ci sono in una città come Roma?

Questo esempio – simile all'originale ideato da Enrico Fermi – è usato all'inizio di molti corsi di fisica, perché obbliga a sfruttare metodi e ragionamenti comuni a tutti i problemi di questo tipo, ma senza richiedere nozioni specifiche di fisica.

Soluzione: questo problema è così complicato che non si può semplicemente stimare la risposta; per risolverlo dobbiamo scomporlo in quesiti più limitati.

Dobbiamo stimare (1) quanti pianoforti ci sono a Roma e (2) di quanti pianoforti può occuparsi ogni accordatore.

Per stimare il numero di pianoforti occorre conoscere (a) la popolazione della città, (b) la frazione della popolazione che possiede un pianoforte e (c) il numero di scuole, conservatori e così via in cui si trovano pianoforti.

Poi per stimare di quanti pianoforti può occuparsi ogni accordatore dovremo sapere (A) con che frequenza si accordano i pianoforti, (B) il tempo richiesto dall'operazione e (C) quante ore lavora ciascun accordatore.

Nel complesso per risolvere il problema dobbiamo stimare le cose seguenti:

1. la popolazione di Roma
2. il numero di pianoforti per abitante
3. la frequenza con cui si accorda un pianoforte
4. il tempo necessario per accordarlo
5. le ore di lavoro annuali di ogni accordatore

Cominciamo dall'alto.

1. La popolazione di Roma deve essere inferiore a 10^7 (visto che la popolazione italiana è 6×10^7) e superiore a 10^5 (gli abitanti di una città di media grandezza); la stimeremo a 10^6.

2. I proprietari di pianoforte sono famiglie e scuole. Circa il 10% della popolazione suona uno strumento musicale (di sicuro la frazione è più dell'1% e meno del 100%). Non tutti i musicisti suonano il pianoforte o ne possiedono uno, quindi stimiamo che il 3% dei musicisti abbia un pianoforte; ciò equivale a $3\% \times 10\% = 3 \times 10^{-3}$ della popolazione (tre ogni 1000 abitanti).
Il numero di scuole con pianoforte sarà più o meno una ogni 500 studenti, cioè circa una ogni 1000 abitanti, ossia 10^{-3} pianoforti/abitante.
In totale ci saranno dunque circa 4×10^{-3} pianoforti a persona, e il numero totale di pianoforti a Roma sarà più o meno $10^6 \times 4 \times 10^{-3} = 4 \times 10^3$.

3. Probabilmente i pianoforti si accordano meno di una volta al mese e più di una volta ogni dieci anni; stimeremo che la frequenza sia una volta all'anno.

4. L'accordatura di un pianoforte (non troppo stonato) deve richiedere più di 30 minuti e meno di un giorno; stimeremo che siano necessarie 2 ore.
Un altro modo di considerare la faccenda è che il pianoforte ha 88 tasti; dedicando un minuto a ogni tasto ci vorranno 1,5 ore, mentre a due minuti per tasto ci vorranno 3 ore.

5. Un lavoro a tempo pieno occupa 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana e 50 settimane all'anno, il che equivale a $8 \times 5 \times 50 = 2000$ ore.
Poiché abbiamo stimato due ore per pianoforte, in un anno l'accordatore stakanovista riesce ad accordare circa 1000 pianoforti (però!).

Tutto questo significa che i 4×10^3 pianoforti della città di Roma richiedono 4 accordatori.

Quanto ci siamo andati vicini? Be', sulle *Pagine Gialle* di Roma alla voce «Pianoforti» si trovano sette inserzioni di ditte che si occupano di accordarli.

Probabilmente a ogni inserzione corrisponde un paio di accordatori, che magari però non si dedicano a questa attività a tempo pieno.

Questo significa che la nostra stima probabilmente è troppo bassa di un fattore due o tre. È comunque *molto* più accurata del numero che avremmo ottenuto tirando a indovinare.

Ricordate che stiamo soltanto cercando di stimare la risposta entro un fattore dieci.

Maneggiare i grandi numeri

Come forse avrete notato, abbiamo scritto 100 milioni come 10^8 anziché come 100 000 000, e questo per due motivi.

La notazione scientifica

Il primo motivo è che se moltiplichiamo tremila miliardi per venti milioni di miliardi scrivendo i numeri per esteso, così:

$$3\,000\,000\,000\,000 \times 20\,000\,000\,000\,000\,000$$
$$= 6\,000\,000\,000\,\ldots$$

è praticamente sicuro che contando tutti quei maledetti zeri faremo qualche errore.

Se usiamo una calcolatrice, prima conteremo male gli zeri e poi faremo errori nel digitarli, così il risultato finale sarà ancora più sbagliato; la risposta ottenuta avrà la prima cifra giusta (6) ma l'ordine di grandezza sbagliato.

Sarebbe come ricevere 60 euro quando ve ne devono 6000: il numero degli zeri è molto più importante della prima cifra.

Esiste una notazione semplice e compatta per i numeri molto grandi e molto piccoli: si può scrivere qualsiasi numero come il prodotto di un numero compreso fra 1 e 10 per una potenza di dieci.

Per esempio 257 può essere riscritto nella forma $2{,}57 \times 100$ e 0,00257 nella forma $2{,}57 \times 0{,}001$.

Ora bisogna contare gli zeri (ma soltanto una volta per ciascun numero): cento (100) ha due zeri, quindi lo scriviamo come 10^2, e 0,001 ha tre zeri (contando anche quello prima della virgola) e inoltre è minore di 1, quindi lo scriviamo come 10^{-3}.

Dunque scriviamo 257 come $2{,}57 \times 10^2$ e 0,00257 come $2{,}57 \times 10^{-3}$. L'*esponente* indica il numero di zeri nella potenza di dieci (2 e –3 negli esempi precedenti) e il *coefficiente* è il numero che la moltiplica. Questo sistema è chiamato *notazione scientifica*.

Ecco alcuni esempi per chiarire:

$0{,}01 = 10^{-2}$

$2000 = 2 \times 10^3$

$3\,000\,000 = 3 \times 10^6$

Il secondo motivo che ci spinge a usare la notazione scientifica, ossia il formato $x \times 10^y$, è che la parte più importante del numero è l'esponente y, non il coefficiente x.

Quando per esempio scriviamo la popolazione italiana, 60 milioni di persone, nella forma 6×10^7 persone, il 7 è molto più importante del 6.

Se il 6 diventasse un 5, infatti, la popolazione cambierebbe solo di 1/6, cioè del 15%.

Ma se invece il 7 diventasse un 8, la popolazione cambierebbe di un fattore 10, cioè del 1000%: un cambiamento enorme, soprattutto considerando che l'Italia è già abbastanza affollata.

Perciò la notazione scientifica ci aiuta, facendo apparire in modo esplicito l'esponente.

Le quattro operazioni

Le regole per moltiplicare e dividere i numeri scritti in notazione scientifica sono semplicissime.

Per moltiplicare due numeri si moltiplicano i coefficienti e si sommano gli esponenti. Per esempio:

$$(3 \times 10^6) \times (4 \times 10^8) = (3 \times 4) \times 10^{6+8} = 12 \times 10^{14} = 1{,}2 \times 10^{15}$$

Per dividere due numeri si dividono i coefficienti e si sottraggono gli esponenti. Per esempio:

$$\frac{3 \times 10^6}{4 \times 10^8} = \frac{3}{4} \times 10^{6-8} = 0{,}75 \times 10^{-2} = 7{,}5 \times 10^{-3}$$

Osservate che in questi esempi ci siamo ritrovati con un coefficiente maggiore di 10 o minore di 1; in tal caso si riscrive in notazione scientifica anche il coefficiente «fuori norma».

Nel primo esempio abbiamo riscritto il coefficiente 12 come $1{,}2 \times 10^1$, ossia abbiamo fatto l'operazione:

$$12 \times 10^{14} = (1{,}2 \times 10^1) \times 10^{14} = 1{,}2 \times 10^{15}$$

Nel secondo caso invece abbiamo riscritto il coefficiente 0,75 come $7{,}5 \times 10^{-1}$, così che:

$$0{,}75 \times 10^{-2} = (7{,}5 \times 10^{-1}) \times 10^{-2} = 7{,}5 \times 10^{-3}$$

Quando si fanno somme o sottrazioni in notazione scientifica, i due numeri devono avere lo stesso esponente.

Se per esempio vogliamo fare la somma di 3×10^7 e 4×10^8, dobbiamo prima convertire il numero con l'esponente minore in modo tale che assuma lo stesso esponente dell'altro numero.

In un caso come questo, quando aumentiamo l'esponente da 7 a 8, dobbiamo allo stesso tempo dividere il coefficiente per 10*.

Scriveremo dunque:

$$3 \times 10^7 + 4 \times 10^8 = 0{,}3 \times 10^8 + 4 \times 10^8 = 4{,}3 \times 10^8$$

Tornando alla moltiplicazione di inizio capitolo, scriviamo tremila miliardi (ossia 3 000 000 000 000) nella forma 3×10^{12} e venti milioni di miliardi (ossia 20 000 000 000 000 000) nella forma 2×10^{16}, così l'operazione diventa:

$$3 \times 10^{12} \times 2 \times 10^{16} = (2 \times 3) \times 10^{12+16} = 6 \times 10^{28}$$

Ora non c'è più bisogno di contare gli zeri: basta sommare gli esponenti. È molto più facile sommare 12 e 16 per ottenere 28, piuttosto che contare 12 zeri e 16 zeri e poi scrivere 28 zeri.

* Infatti aumentare l'esponente di un'unità equivale a moltiplicare il numero per 10, quindi bisogna ridurre il coefficiente di dieci volte per compensare la variazione, in modo che il numero non cambi.

La precisione

Come abbiamo già detto, la parte più importante di ogni numero è l'esponente.

In ordine di importanza viene poi la prima cifra del coefficiente (il numero che moltiplica la potenza di dieci); le eventuali cifre successive del coefficiente sono soltanto piccole correzioni alla prima.

Il numero di cifre nel coefficiente, detto anche *numero di cifre significative*, specifica con quale precisione conosciamo il numero.

Se per esempio un amico vi dà indicazioni stradali, c'è una bella differenza fra questa indicazione: «Segui questa strada per una ventina di kilometri, poi gira a sinistra in via Vattelapesca» e quest'altra: «Segui questa strada per 21,6 kilometri, poi gira a sinistra in via Vattelapesca».

La prima indicazione è abbastanza vaga e imprecisa: vi aspettate di trovare via Vattelapesca a una distanza compresa grossomodo fra 15 e 25 kilometri; se non vi accorgete della svolta a sinistra, è probabile che andrete avanti un bel po' prima di tornare indietro a cercarla.

Invece la seconda indicazione è molto precisa: vi aspetterete di trovare via Vattelapesca a una distanza compresa tra 21,5 e 21,7 kilometri; se mancate la svolta a sinistra, probabilmente tornerete indietro prima del ventiduesimo kilometro.

Le cifre significative in più nella seconda indicazione rivelano dunque che il vostro amico ha misurato la distanza con grande accuratezza.

L'aneddoto seguente illustra come sia però altrettanto insensato citare *troppe* cifre significative.

Siete al museo di storia naturale e chiedete al guardiano a quando risale un certo scheletro di dinosauro. Lui vi risponde che il reperto ha 75 milioni e 3 (75 000 003) anni. Vedendovi sorpresi, il guardiano poi vi spiega che quando è stato assunto, tre anni fa, lo scheletro aveva già 75 milioni di anni.

Molti di noi fanno lo stesso tipo di errore usando la calcolatrice.

Immaginiamo per esempio di aver consumato 43,0 litri di benzina per percorrere 522 kilometri.

Se per calcolare il consumo al kilometro dividiamo 522 per 43 con la calcolatrice, otterremo il risultato 12,1395348..., ma questa non può essere la risposta giusta: non abbiamo misurato né i kilometri percorsi né la benzina consumata con la precisione di una parte su un miliardo, quindi è impossibile che la risposta sia così precisa.

I kilometri percorsi con un litro dovrebbero essere piuttosto 522 km/43,0 L = 12,1 km/L.

Ci sono molte regole che bisogna rispettare per trattare correttamente le cifre significative nei calcoli scientifici, ma per fortuna noi potremo ignorarne la maggior parte.

Infatti in questo libro faremo stime entro un fattore dieci, perciò nei coefficienti ci basterà quasi sempre tenere una cifra soltanto: per esempio approssimeremo $7{,}2 \times 10^3$ con 7×10^3.

Il fatto è che in ogni caso le nostre stime non sono accurate oltre la prima cifra; tenere più cifre equi-

varrebbe a mentire, sopravvalutando la precisione con cui conosciamo le risposte.

E c'è un altro vantaggio nel tenere una sola cifra significativa: per risolvere questi problemi non dovrebbe servirvi la calcolatrice. Se riuscite a fare a mente somme o sottrazioni di numeri a una o due cifre (gli esponenti) e moltiplicazioni o divisioni di numeri a una cifra (i coefficienti), allora siete pronti a partire.

Le unità di misura

Useremo il sistema metrico (SI o Sistema Internazionale) in cui tutte le unità sono basate su metro, secondo e kilogrammo; per esempio l'unità di misura delle forze, chiamata newton e indicata con il simbolo N, è pari a 1 kilogrammo × metro/secondo^2.

Inoltre useremo le seguenti abbreviazioni per le unità di misura: m = metro, s = secondo, kg = kilogrammo, W = watt, J = joule, N = newton, L = litro, h = ora, t = tonnellata = 10^3 kg.

Useremo anche i prefissi standard giga- = 10^9 (G), mega- = 10^6 (M), kilo- = 10^3 (k), centi- = 10^{-2} (c), milli- = 10^{-3} (m), micro- = 10^{-6} ( ) e nano- = 10^{-9} (n), come riassunto nelle Appendici. Se avremo bisogno di usare prefissi più bizzarri come pico-, tera- o yocto-, vi avvertiremo prima.

La conversione delle unità

Spesso dovremo convertire un valore da un'unità di misura a un'altra. Se per esempio vogliamo calcolare la distanza percorsa dalla luce in un anno o l'energia consumata in un anno da una lampadina da 100 W, dobbiamo convertire l'anno in un certo numero di secondi. Per far questo si moltiplica il numero di partenza per vari fattori di conversione che individualmente sono tutti uguali a 1, come $\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}$.

Per esempio:

$$1\text{ anno} = 1\text{ anno} \times \left(\frac{365\text{ giorni}}{1\text{ anno}}\right)\left(\frac{24\text{ h}}{1\text{ giorno}}\right) \times \left(\frac{60\text{ min}}{1\text{ h}}\right)\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right) = 3{,}15 \times 10^7\text{ s}$$

Ecco un altro risultato che useremo spesso nel seguito del libro; scrivetevi pure anche questo valore sul palmo della mano.

Avete notato che 1 anno $\approx \pi \times 10^7$ s? Qui appare il numero π perché ogni anno la Terra gira attorno al Sole lungo un cerchio quasi perfetto, e la lunghezza di una circonferenza è $c = 2\pi R$**.

** Non ci avrete creduto, vero? In realtà il coefficiente molto vicino a π è soltanto una coincidenza, ma torna utile come trucco mnemonico. E come sempre l'esponente 7 è molto più importante rispetto al 3, che è la prima cifra del coefficien-

Qualche problema generale per iniziare

Iniziamo con alcuni semplici problemi che riguardano le aree e le distanze.

Ci chiederemo per esempio di quanto spazio abbiamo bisogno per noi stessi e di quanto per tutta la spazzatura che produciamo.

Una grande famiglia 3.1

Se tutti gli esseri umani fossero stipati in un luogo, quanto spazio occuperebbero? Confrontate il risultato con l'area di una grande città o di una nazione. E quanto spazio ci vorrebbe se ogni famiglia avesse una casetta con un po' di giardino?

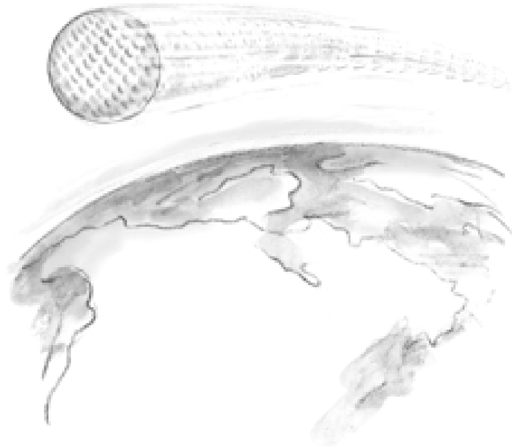
SUGGERIMENTI

- La popolazione della Terra si avvicina a 7 miliardi di persone.
- Quante persone ci stanno in un metro quadrato?
- Stimate lo spazio necessario a una persona, poi moltiplicate per il numero di persone.
- Per stimare l'area del giardino supponete che sia quadrato; così, se i lati sono lunghi 10 m, l'area del giardino sarà data da $A = 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$.

SOLUZIONE A PAGINA 119

Palla! 3.2

Se mettessimo tante palline da golf (o da ping-pong) una accanto all'altra, quante ce ne vorrebbero per fare un giro completo attorno all'equatore terrestre?



SUGGERIMENTI

- Qual è il diametro di una pallina da golf?
- Quanto è lunga la circonferenza della Terra? Se ricordate quanto vale il raggio, la circonferenza è $c = 2\pi R$ (se non ricordate il valore del raggio, c vale sempre $2\pi R$ ma la formula non è molto utile).
- Ci sono 6 ore di differenza tra Roma e New York. In tutto i fusi orari sono 24. Si vola da Roma a New York in 8 ore.

SOLUZIONE A PAGINA 121

Gettare la spugna 3.3

Pensate a un asciugamano di spugna da spiaggia: quanto vale l'area della sua superficie, se si considerano tutte le singole fibre?

Confrontatela con l'area di una stanza, di una casa o di un campo da calcio.

SUGGERIMENTI

- Pensate alle minuscole fibre di un asciugamano davvero lanuginoso; quante ce ne sono per centimetro quadrato?
- Qual è l'area di un grande asciugamano? Quante fibre ha in totale?
- Qual è l'area della superficie di ogni fibra? Tenete conto della lunghezza e dello spessore di ogni fibra.

SOLUZIONE A PAGINA 123

Riempire una cupola 3.4

Quanto ci metterebbe l'acqua che scorre da un rubinetto a riempire la cupola (capovolta) di San Pietro?

Date la risposta in secondi, giorni, settimane o nell'unità di tempo che vi pare più adatta.

SUGGERIMENTI

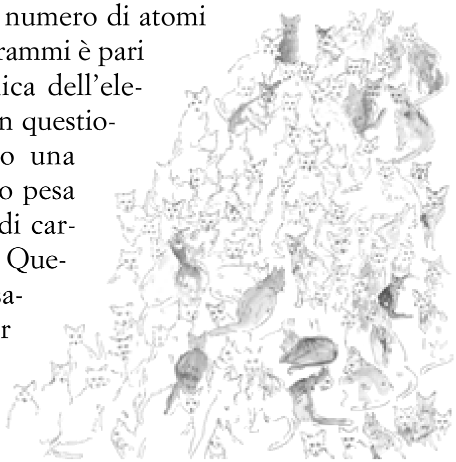
- Stimate il diametro d della cupola.
- Volume $\approx (1/4)\ d^3$.
- Quanto tempo occorre per riempire una bottiglia da un litro al rubinetto della cucina? Oppure qual è la portata della vostra doccia in litri al minuto?
- 1 m^3 equivale a 10^3 L.

SOLUZIONE A PAGINA 125

Una mole di gatti 3.5

Qual è la massa di una mole di gatti?

Una *mole* è il numero di atomi la cui massa in grammi è pari alla massa atomica dell'elemento chimico in questione; per esempio una mole di idrogeno pesa 1 g e una mole di carbonio pesa 12 g. Questo concetto è usato in chimica per misurare il numero degli atomi che partecipano a una reazione chimica.



Confrontate il risultato con la massa di una montagna, di un continente, della Luna (7×10^{22} kg) e della Terra (6×10^{24} kg).

Suggerimenti

- Una mole di qualsiasi tipo di oggetti equivale a un numero di Avogadro (6×10^{23}) degli oggetti considerati.
- Quanto pesa un tipico esemplare adulto di gatto domestico?

Soluzione a pagina 127

Una lotteria massiccia 3.6

Se si radunassero tutti e 10^8 i biglietti della lotteria, quale sarebbe la loro massa?

Quanti camion da 40 tonnellate ci vorrebbero per portarli via tutti?

Suggerimenti

- Quanto potrebbero essere lunghi e larghi questi biglietti? Ricordate che abbiamo già stimato il loro spessore: 2×10^{-4} m.
- Qual è l'area complessiva dei biglietti in metri quadrati?
- Massa = volume × densità.
- Quale potrebbe essere la densità di questi biglietti, in confronto a quella dell'acqua per esempio? La densità dell'acqua è 10^3 kg/m^3 (ossia un metro cubo d'acqua pesa 10^3 kg, cioè una tonnellata).

Soluzione a pagina 127

Tonnellate di spazzatura 3.7

Quanti rifiuti domestici si raccolgono ogni anno in Italia (in m^3 o in tonnellate)?

SUGGERIMENTI

- Quanta spazzatura buttate via ogni settimana?
- I sacchetti per la spazzatura domestica hanno in media un volume di 50 L, ma sono comprimibili.
- Stimate quante famiglie ci sono in Italia.

SOLUZIONE A PAGINA 129

Un mucchio d'immondizia 3.8

Se mettessimo tutta la spazzatura del problema precedente in un'unica discarica, quanto spazio occuperebbe? Quale frazione sarebbe della superficie dell'Italia?

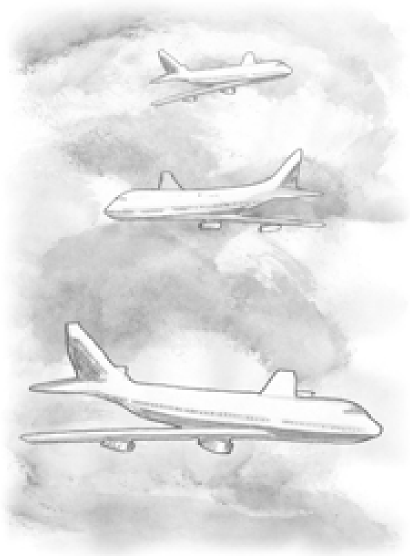
SUGGERIMENTI

- Qual è il volume di spazzatura calcolato nel problema precedente? Che superficie occupa tutta quella spazzatura? Quanto può essere alta la pila?
- Qual è l'area del territorio italiano? Il treno Frecciarossa impiega dieci ore per andare da Milano a Reggio Calabria. Qual è il rapporto fra larghezza e lunghezza della Penisola?

SOLUZIONE A PAGINA 131

Gente per aria 3.9

In media quante persone si trovano in volo nei cieli italiani in un qualsiasi istante della giornata?



SUGGERIMENTI

- Considerate un orario diurno, non le tre di notte.
- Pensate alla frazione di tempo che passate in volo, cioè al numero di ore o giorni di volo all'anno, in confronto al numero totale di ore o giorni che costituiscono un anno.
- La frazione del tempo che passate in volo è uguale alla frazione della popolazione che è in volo in ogni momento.

SOLUZIONE A PAGINA 133

Schiaffare negli scaffali 3.10

In California durante un violento terremoto dagli scaffali di una biblioteca sono caduti due milioni di libri. Quanti studenti bisognerebbe arruolare per rimettere a posto tutti i libri in tre settimane?

SUGGERIMENTI

- Quanti libri può risistemare uno studente in un'ora? Attenzione: i libri vanno rimessi a posto nel loro giusto ordine, non a caso
- Quante ore alla settimana può lavorare uno studente?

SOLUZIONE A PAGINA 135

3.1

Se tutti gli esseri umani fossero stipati in un unico luogo, quanto spazio occuperebbero? E quanto spazio servirebbe se ogni famiglia avesse una casetta con un po' di giardino?

Bene, 7 miliardi di persone significa 7×10^9. Quante persone entrano in un metro quadrato? Non lo sappiamo, ma di sicuro è un numero compreso tra 3 e 10; diciamo 7 (stiamo ignorando lo spazio necessario per giocare, mangiare, dormire e... be', la domanda sui gabinetti la vedremo nel capitolo 4).

Se in un metro quadrato entrano 7 persone, 7 miliardi di persone avranno bisogno di un'area:

$$A = 7 \times 10^9 \text{ persone} \times \frac{1 \text{ m}^2}{7 \text{ persone}} = 10^9 \text{ m}^2$$

Non abbiamo idea di quanto sia un miliardo di metri quadrati (anche se a occhio sembra tanto), quindi convertiamolo in unità più ragionevoli, per esempio in kilometri quadrati.

Un kilometro quadrato equivale all'area di un quadrato con lato pari a 10^3 m, quindi abbiamo che $1 \text{ km}^2 = 10^3 \text{ m} \times 10^3 \text{ m} = 10^6 \text{ m}^2$. Dunque:

$$A = 10^9 \text{ m} \times \frac{1 \text{ km}^2}{10^6 \text{ m}^2} = 10^3 \text{ km}^2$$

(Vi ricordiamo che per dividere numeri in notazione scientifica bisogna dividere i coefficienti e sottrarre gli esponenti. In questo caso $10^9/10^6 = 10^{9-6} = 10^3$.)

Quindi occuperemmo un'area di 1000 kilometri quadrati; tutta la popolazione della Terra entrerebbe cioè in un quadrato di 30 km di lato, grossomodo l'area di una città come Roma. Perbacco, non servirebbe poi una superficie tanto grande!

Ora assegniamo a ciascuna famiglia una villetta con un piccolo appezzamento di terra. Prima di tutto occorre stimare le dimensioni di una famiglia media. In Occidente un nucleo famigliare tipico ha circa 3 persone, ma nelle nazioni in via di sviluppo sono di più; diciamo comunque che siano 3, in modo da sovrastimare lo spazio necessario.

Il prossimo passo è stimare le dimensioni del giardino. Siccome non siamo bravi a stimare aree, supporremo che il giardino sia quadrato e ne stimeremo il lato. Di certo sarà più corto del lato lungo di un campo da calcio (100 m) e più lungo della larghezza di una casa (10 m), quindi prendiamo la media geometrica e stimiamo che il lato sia lungo 30 m.

Questo significa che ogni famiglia riceve un appezzamento di area $A = 30 \text{ m} \times 30 \text{ m} = 10^3 \text{ m}^2$. In tal caso tutti gli esseri umani del mondo occuperanno un'area totale pari a:

$$A = 7 \times 10^9 \text{ persone} \times \frac{1 \text{ famiglia}}{3 \text{ persone}} \times \frac{10^3 \text{ m}^2}{\text{famiglia}}$$

$$= 2 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

(Promemoria: per moltiplicare numeri in notazione scientifica si moltiplicano i coefficienti e si sommano gli esponenti; in questo caso $10^9 \times 10^3 = 10^{9+3} = 10^{12}$.)

Quest'area equivale a $2 \times 10^6 \text{ km}^2$, due milioni di kilometri quadrati.

Sembra molto, ma è meno di metà dell'area dell'Unione Europea, o il doppio dell'area dell'Egitto; ed equivarrebbe ad appena l'1% delle terre emerse del pianeta.

Rimarrebbe parecchio spazio per le altre specie!

3.2

Se mettessimo tante palline da golf (o da ping-pong) una accanto all'altra, quante ce ne vorrebbero per fare un giro completo attorno all'equatore terrestre?

Per risolvere questo problema occorre stimare il diametro di una pallina da golf e la circonferenza terrestre. La prima parte è semplice: il diametro di una pallina da golf, o da ping-pong, è pari a circa 4 cm.

Quanto alla circonferenza terrestre, la si può stimare in molti modi. Per esempio c'è una differenza di 6 ore tra l'Italia e New York e la Terra è suddivisa in 24 fusi orari; quindi la circonferenza terrestre sarà circa quattro volte la distanza tra Roma e New York.

Se non ricordate che questa distanza è di circa 7000 kilometri, potete stimarla in base al fatto che si può volare tra le due città in circa otto ore, e che gli aerei moderni volano grossomodo a 900 km/h.

Quindi la circonferenza terrestre sarà lunga circa $c = 4 \times 7000 \text{ km} = 3 \times 10^4 \text{ km}$. Questo però vale alla latitudine di Roma e New York, dove i paralleli sono più corti dell'equatore. La lunghezza dell'equatore infatti è un po' maggiore, vale 4×10^4 km.

Se invece vi foste ricordati che la circonferenza terrestre è di 40 000 km o che il raggio della Terra è di 6400 km e la circonferenza vale $c = 2\pi R$, ovviamente non avreste avuto bisogno di fare stime.

Ora i conti sono facilissimi. Convertendo la circonferenza terrestre da kilometri a centimetri, troviamo che il numero di palline da golf necessarie è:

$$N = 4 \times 10^4\ \text{km} \times \frac{10^3\text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{10^2\ \text{cm}}{1\ \text{m}} \times \frac{1\ \text{pallina da golf}}{4\ \text{cm}}$$

$$= 10^9\ \text{palline da golf}$$

L'oceano Pacifico è enorme, e sarebbe davvero irritante veder colare a picco centinaia di milioni di palle da golf! Meglio perciò usare palline da ping-pong, che sicuramente galleggiano.

Questo problema fornisce anche uno spunto interessante per inquadrare il concetto di «parte per miliardo» o ppb (abbreviazione dell'espressione inglese *parts per billion*). A volte si sente dire che l'aria contiene un dato numero di parti per miliardo di una certa sostanza che potrebbe essere tossica. Ecco: potete farvi un'idea della concentrazione di quella sostanza immaginando qualche pallina rossa disseminata fra il miliardo di palline bianche necessario a circondare la Terra. Potreste camminare lungo l'equatore per mesi prima di incontrare una pallina rossa!

3.3

Qual è l'area effettiva di un asciugamano, se si considera la superficie di tutte le singole fibre che lo compongono?

Ma è ovvio! Un grande asciugamano rettangolare lungo 2 m e largo 1 m ha un'area totale di 4 m^2, se si includono entrambi i lati. Giusto?

Be', in realtà no, a meno che l'asciugamano sia molto liso.

Gli asciugamani nuovi infatti hanno un gran numero di piccole fibre che sono in grado di assorbire molta umidità*.

Se volete constatarlo di persona, fate un salto in bagno ed esaminatene uno; e sbrigatevi, ché stiamo gocciolando su tutto il pavimento.

In realtà non avete bisogno di mettervi a contare con precisione il numero di fibre per centimetro quadrato; potete limitarvi a stimarlo.

In ogni cm^2 le fibre devono essere più di 10 e meno di 1000, quindi prenderemo la media geometrica dei due numeri 10^1 e 10^3 e useremo il valore 10^2 fibre/cm^2.

Ovviamente questo numero potrà variare a seconda del negozio dove avete comprato l'asciugamano; qui immagineremo che si tratti di uno di quei bellissimi asciugamani bianchi che si trovano in quei bellissimi alberghi.

* Pensate al vecchio indovinello: che cos'è che tanto più si bagna quanto più si asciuga?

Già di ritorno dal bagno? Bene. Ora dobbiamo stimare l'area della superficie delle fibre. Possiamo schematizzare la fibra come un cilindro o una scatola; il cilindro è un oggetto complicato, perciò useremo il modello a scatola.

Ogni fibra è lunga circa mezzo centimetro (5 mm) e larga 1 mm; perciò la scatola che la rappresenta ha quattro superfici piane, ognuna lunga 5×10^{-3} m e larga 10^{-3} m.

L'area di una fibra quindi è data da:

$$A_{\text{fibra}} = 4 \times 5 \times 10^{-3}\ \text{m} \times 10^{-3}\ \text{m} = 2 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$

Ora possiamo calcolare l'area complessiva della superficie del nostro grande asciugamano:

A_{totale} = area dell'asciugamano × fibre per unità di area × area di una fibra =

$$= 4\ \text{m}^2 \times \frac{10^2\ \text{fibre}}{\text{cm}^2} \times \frac{10^4\ \text{cm}^2}{1\ \text{m}^2} \times \frac{2 \times 10^{-5}\ \text{m}^2}{\text{fibra}}$$

$$= 80\ \text{m}^2$$

L'area «effettiva» dell'asciugamano dunque è pari a quella di un appartamento neppure troppo piccolo.

Questo problema è simile per molti versi a quello di calcolare la lunghezza delle coste.

Così come l'area effettiva dell'asciugamano è molto maggiore del prodotto dei suoi lati, la lunghezza della costa tra Roma e Napoli (per esempio) è molto maggiore dei 200 km che si percorrono viaggiando in auto tra le due città.

3.4

Quanto tempo impiegherebbe l'acqua che scorre da un rubinetto di casa per riempire la cupola (capovolta) di San Pietro?

Dobbiamo stimare il volume della cupola e la portata di un rubinetto.

Per ricavare il volume della cupola di San Pietro dobbiamo stimarne il diametro, che sarà sicuramente maggiore di 10 m e minore di 100 m (la lunghezza di un campo da calcio).

Perciò prendiamo la media geometrica di questi due estremi e stimiamo che il diametro della cupola sia $\sqrt{10 \times 100}$ m = 30m.

Se a questo punto ci ricordiamo che il volume di una sfera è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e teniamo conto del fatto che una cupola è una mezza sfera, abbiamo:

$$V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \times (15\ \text{m})^3 = 6 \times 10^3\ \text{m}^3$$

E se invece abbiamo dimenticato la formula per il volume della sfera?

Allora potremmo far finta che la cupola sia metà di un cubo (come avrebbe fatto Picasso) e stimare il volume in quest'altro modo:

$$V = \frac{1}{2} d^3 = 0{,}5 \times (30\ \text{m})^3 = 10^4\ \text{m}^3$$

Questa stima sarebbe sbagliata soltanto di un fattore due: non è un problema!

Ora dobbiamo stimare la portata di un rubinetto. Un tipico rubinetto domestico aperto al massimo può riempire una bottiglia da un litro in circa 5 secondi, mentre la portata di una doccia può essere di 10 litri al minuto, circa la stessa del rubinetto.

Siccome un metro cubo d'acqua equivale a 10^3 litri, il tempo necessario per riempire la cupola di San Pietro è:

$$t = \frac{\text{volume della cupola}}{\text{portata}}$$

$$= \frac{6 \times 10^3 \text{ m}^3 \times 10^3 \text{ L/m}^3}{10 \text{ L/min}} = 6 \times 10^5 \text{ min}$$

Seicentomila minuti però non è un numero che significhi granché; convertiamolo in unità più appropriate e vediamo che cosa viene fuori.

Siccome ci sono 60 minuti in un'ora, ovverosia circa $60 \times 25 = 1500$ minuti in un giorno*, convertendo i minuti in giorni otteniamo:

$$t = 6 \times 10^5 \text{ min} \times \frac{1 \text{ giorno}}{1{,}5 \times 10^3 \text{ min}} = 400 \text{ giorni}$$

cioè poco più di un anno.

Ovviamente bisognerebbe prima capovolgere la cupola...

* Spesso vorremmo che le giornate durassero un'ora in più. In questo caso è soltanto un trucco per semplificare i calcoli.

3.5

Qual è la massa di una mole di gatti?

Consideriamo gatti grassi che pesano circa 8 kg ciascuno. Stiamo prendendo a modello un gatto del vicinato, di nome Quentin, benché lui non ci abbia dato il permesso (e nemmeno il suo padrone).

Ci sono $N_A = 6 \times 10^{23}$ oggetti in una mole, che si parli di una mole di atomi o di gatti (o di una mole di moli).

Perciò la massa di tutti quei gatti sarà circa:

$$M = 8 \text{ kg} \times 6 \times 10^{23} = 5 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Questa è grossomodo la massa della Terra, o 70 volte quella della Luna. Davvero pazzesco! E con nove vite ciascuno...

Se trovate assurda una Terra fatta di gatti, continuate a leggere e finirete per incontrare un Sole fatto di criceti (problema 8.5).

3.6

Se si radunassero tutti e 10^8 i biglietti della lotteria, quale sarebbe la loro massa?

Per stimare la massa di tutti quei biglietti dovremo stimarne il volume e la densità, cioè la massa per unità di volume. La densità dell'aria ha un valore molto basso (1 kg/m^3), quella dell'acqua è intermedia (vale 10^3 kg/m^3 o 1 kg/L) e quella del piombo è alta (10^4 kg/m^3 o 10 kg/L).

Il volume è il prodotto di lunghezza, larghezza e spessore. Nel primo esempio del capitolo 1 abbiamo valutato che i biglietti sono spessi 2×10^{-4} m, perciò ci mancano soltanto la lunghezza e la larghezza.

Stimiamo che i biglietti siano lunghi 10 cm, una bella cifra tonda da elevare al quadrato; allora:

$$V = 10 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} \times 10 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} \times 2 \times 10^{-4} \text{ m}$$
$$= 2 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

perciò il volume complessivo dei 10^8 biglietti è pari a $V = 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 200$ m^3.

E che massa occuperebbe questa pila di biglietti? Come abbiamo imparato a scuola, la massa è pari al prodotto del volume e della densità.

Se compriamo un biglietto e non vinciamo potrebbe venirci voglia di buttarlo. Ovviamente non lo faremmo mai, perché non si lascia spazzatura in giro, per quanto si possa essere scocciati; ma immaginando per ipotesi di buttare il biglietto in una pozzanghera, lo vedremmo galleggiare o colare a picco? La risposta giusta è la prima, crediamo, almeno finché il biglietto non assorbe un po' d'acqua e perciò affonda, come fanno alcuni oggetti di carta dopo un po' che stanno in acqua.

Questo significa che la densità del biglietto è abbastanza vicina a quella dell'acqua; siccome quest'ultima è pari a 1000 kg/m^3 o 1 t/m^3, la massa totale è di 200 tonnellate. In conclusione ci vorrebbero cinque camion da 40 tonnellate per portar via tutti i biglietti.

Si può considerare la faccenda in un altro modo: per essere sicuri di vincere bisognerebbe comprare cinque camion pieni di biglietti!

3·7

Quanti rifiuti domestici si raccolgono ogni anno in Italia (in m^3 o in tonnellate)?

Prima che iniziasse la raccolta differenziata, si svuotava il bidone della spazzatura da 50 L della cucina più o meno a giorni alterni. Supponiamo che questo valore sia una buona stima della nostra produzione di rifiuti (se considerassimo a parte i rifiuti riciclabili, la risposta diminuirebbe di un fattore due o tre).

Allora, svuotare il bidone della spazzatura tre o quattro volte a settimana equivale a produrre 200 litri di spazzatura per tre o quattro persone. Poiché un litro è pari a 10^{-3} m^3, il volume della spazzatura è 0,2 m^3, quindi in un anno (50 settimane) una famiglia produce $50 \times 0{,}2$ m^3 $= 10$ m^3 di spazzatura. Accidenti!

In realtà la situazione è anche peggiore. In Italia vivono 6×10^7 persone, cioè circa 2×10^7 famiglie, quindi si producono 2×10^8 m^3 di spazzatura non compressa.

Ora cerchiamo di valutare la massa di tutta questa spazzatura. Bisogna tenere presenti due fatti: primo, la spazzatura è per lo più solida, quindi nel sacchetto dell'immondizia c'è molto spazio vuoto; il secondo fatto, collegato al primo, è che la densità della spazzatura è molto minore di quella dell'acqua. Stimiamola.

Probabilmente quel sacchetto da 50 L ben riempito pesa soltanto 5 kg o forse 10 kg, quindi la sua densità è compresa tra 0,1 e 0,2 kg/L (cioè tra 0,1 e 0,2 t/m^3, il che equivale rispettivamente al 10% e al 20% della densità dell'acqua).

Se prendiamo una densità media di 0,2 t/m^3, troviamo che in un anno ogni famiglia produce $m = 10$ m$^3 \times 0{,}2$ t/m^3 = 2 tonnellate di spazzatura. Notate che siccome la densità media è così bassa, comprimendo la spazzatura nei camion che la raccolgono se ne dovrebbe ridurre il volume grossomodo di un fattore tre (più di uno e meno di cinque).

Considerando ora tutta l'Italia, la spazzatura prodotta ogni anno ha una massa totale e un volume compresso pari a:

$$M = 2 \times 10^7 \text{ famiglie} \times \frac{2 \text{ t/anno}}{\text{famiglia}}$$

$$= 4 \times 10^7 \text{ tonnellate di spazzatura/anno}$$

$$V = 2 \times 10^7 \text{ famiglie} \times \frac{1}{3} \times \frac{10 \text{ m}^3\text{/anno}}{\text{famiglia}}$$

$$= 6 \times 10^7 \text{ m}^3 \text{ di spazzatura/anno}$$

Adesso confrontiamo con i dati reali. Secondo l'Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale, nel 2007 in Italia sono stati prodotti 32 milioni ($3{,}2 \times 10^7$) di tonnellate di rifiuti solidi urbani, inclusi quelli riciclabili.

La nostra stima non era troppo lontana dalla realtà, soltanto un fattore due.

Ora dobbiamo pensare a che cosa fare di tutta questa roba. Ne parliamo nel prossimo problema.

3.8

Se facessimo una discarica per tutta la spazzatura del problema precedente, quanto spazio occuperebbe?

Dobbiamo valutare quale area occupi tutta quella spazzatura e quale sia l'area totale che abbiamo a disposizione.

Iniziamo dalla superficie richiesta. Nel problema precedente abbiamo stimato che gli italiani producono 6×10^7 m^3 di spazzatura all'anno (un metro cubo a testa). Se ne facessimo un mucchio alto 1 metro, servirebbe una superficie di 6×10^7 m^2.

Ipotizziamo che nella discarica se ne possano ammucchiare 10 m, l'altezza di una casetta; allora basterà una superficie pari a:

$$A_{\text{spazzatura}} = \frac{6 \times 10^7 \text{ m}^3\text{/anno}}{10 \text{ m}} = 6 \times 10^6 \text{ m}^2\text{/anno}$$

Ma per essere previdenti creiamo una discarica che basti per 100 anni; in tal caso ci vorrà una superficie di 6×10^8 m^2.

Seicento milioni di metri quadrati: sembrano tantissimi, ma vediamo che cosa significano davvero. Un kilometro quadrato è l'area di un quadrato con i lati lunghi 10^3 m, perciò 1 km^2 = $(10^3 \text{ m})^2 = 10^6$ m^2.

Questo significa che seicento milioni di metri quadrati sono soltanto (!) seicento kilometri quadrati ($6 \times 10^8 \text{ m}^2 = 6 \times 10^2 \text{ km}^2$). Sembra ancora moltissimo, ma è soltanto la superficie di una città come Firenze; e comunque abbiamo l'intero Paese in cui depositare la spazzatura.

Qual è l'area dell'Italia? Per semplicità potete immaginare che la penisola sia rettangolare e moltiplicare la sua larghezza, diciamo da Roma a Pescara, per la sua lunghezza, diciamo da Milano a Reggio Calabria. Il risultato sarà sottostimato, perché non tiene conto del Nord-ovest, del Nord-est e delle isole.

I treni più veloci che collegano Milano a Reggio Calabria impiegano 10 ore; se supponiamo che viaggino a 100 km/h di media (fermate comprese), la lunghezza della penisola è di circa 1000 km. La larghezza potete stimarla a occhio, semplicemente guardando una carta geografica: è circa un quinto della lunghezza, cioè 200 km. Allora la superficie della penisola risulta essere grossomodo:

$$A_{\text{Italia}} = 10^3 \text{ km} \times 2 \times 10^2 \text{ km} = 2 \times 10^5 \text{ km}^2$$

L'area effettiva dell'Italia è un po' più grande, pari a 3×10^5 km^2; useremo questo valore.

Dunque la frazione del territorio che bisognerebbe destinare alla nostra discarica è:

$$f = \frac{A_{\text{spazzatura}}}{A_{\text{Italia}}} = 6 \times \frac{10^2 \text{ km}^2}{3 \times 10^5 \text{ km}^2} = 2 \times 10^{-3}$$

Il risultato è il due per mille, ossia lo 0,2%, dell'area della penisola.

Così, dopo aver buttato tutta la spazzatura prodotta in 100 anni in un'unica enorme discarica, avremmo ancora a disposizione il 99,8% della superficie dell'Italia.

3.9

In media quante persone si trovano in volo nei cieli italiani in un qualsiasi istante della giornata?

Qui entrano in gioco due idee di base.

La prima è che la frazione di tempo che una persona media dedica a una certa attività è uguale alla frazione media di persone che in ogni momento fanno quella stessa attività.

Ciò significa per esempio che, se voi passate in media il 10% del vostro tempo in volo, allora in media in qualsiasi momento sarà in volo il 10% della popolazione*.

* Mentre *non* significa che, se passate il 10% del vostro tempo in volo, sarà in volo il 10% della persona media (cioè più o meno una gamba).

Notate che questo stratagemma però funziona soltanto se ci sono abbastanza persone nel campione su cui si calcola la media**.

In altre parole, per il nostro problema:

$$\frac{\text{persone in volo adesso}}{\text{popolazione italiana}} = \frac{\text{tempo passato in volo}}{\text{1 anno}}$$

La seconda idea di base è che possiamo sfruttare la nostra esperienza personale per valutare quale sia la frazione di tempo che una persona media passa in volo, o a fare acquisti, o a dormire, o a fare qualunque altra cosa.

Se vi ricordate, nel capitolo 1 abbiamo stimato che l'italiano medio vola due volte all'anno, che salgono a tre se consideriamo anche i turisti.

Il volo tipico durerà poco più di un'ora (senza contare il tempo passato a parcheggiare, a stare in fila o a consumare il delizioso cibo degli aeroporti...), quindi ci baseremo su tre voli di un'ora ogni anno, o tre ore in volo all'anno.

Otteniamo così la stima:

$$\frac{\text{persone in volo}}{6 \times 10^7 \text{ persone}} = \frac{3 \text{ h}}{400 \text{ giorni} \times 25 \text{ h/giorno}}$$

** Non è sufficiente un'altra persona, e neanche dieci altre; bisogna considerare un numero di persone tale che in qualsiasi momento, statisticamente, alcune siano in volo. In questo caso è certamente così.

che possiamo riscrivere in questo modo:

$$\text{persone in volo} = 6 \times 10^7 \text{ persone} \times \frac{3 \text{ h}}{10^4 \text{ h}}$$

$$= 2 \times 10^4 \text{ persone}$$

perciò in questo momento ci sono circa ventimila persone in volo nei cieli italiani, l'equivalente di duecento aerei da 100 passeggeri. Forse il numero è un po' sovrastimato, comunque speriamo che atterrino tutti senza problemi.

3.10

Quanti studenti bisognerebbe arruolare per rimettere a posto in tre settimane due milioni di libri caduti dai loro scaffali?

I libri non vanno rimessi negli scaffali a caso, ma secondo la catalogazione decimale Dewey, quindi bisogna fare attenzione a individuare il posto giusto di ciascun libro.

Supponiamo che i libri siano caduti non troppo lontano da dove stavano: dunque per risistemarli nessuno studente dovrà andare da un capo all'altro della biblioteca.

Se un libro è a terra vicino ai miei piedi, e capisco subito dove sistemarlo, ci metterò un tempo compreso tra qualche secondo e un minuto.

Dunque si possono riposizionare negli scaffali tra 60 e 600 libri all'ora; prendiamo una media di 200 all'ora (un terzo di 600 e il triplo di 60).

Ne segue che in tre settimane, lavorando otto ore al giorno e cinque giorni a settimana, uno studente può rimettere negli scaffali il seguente numero di libri:

$$N = \frac{200 \text{ libri}}{\text{ora-studente}} \times \frac{8 \text{ ore}}{\text{giorno}} \times \frac{5 \text{ giorni}}{\text{settimana}} \times 3 \text{ settimane}$$

$$= 2 \times 10^4 \text{ libri/studente}$$

Ora, dobbiamo rimettere negli scaffali due milioni di libri, quindi servono:

$$N_{\text{studenti}} = \frac{2 \times 10^6 \text{ libri}}{2 \times 10^4 \text{ libri/studente}} = 10^2 \text{ studenti}$$

In conclusione per rimettere negli scaffali tutti quei libri nel giro di tre settimane ci vorrebbero 100 studenti (sempre ammesso che non si mettano a sfogliare i libri mentre li rimettono a posto).

4.1

Quante cellule ci sono nel corpo umano?

Perdonate la domanda personale – dopo tutto ci conosciamo appena – ma qual è il volume del vostro corpo? Lo trovate sulla carta d'identità, è lì a fianco dell'area totale della vostra pelle... oops, credevamo

di essere già nel futuro. Be', visto che la risposta non è ancora un dato anagrafico, proviamo a calcolarla.

Stimiamo che la vostra massa sia 100 kg, una bella cifra tonda (le signore potranno modificarla come loro aggrada). Possiamo certamente supporre che galleggiate*, dunque la vostra densità media dev'essere vicina a quella dell'acqua, cioè 1 kg/L o 10^3 kg/m^3. E siccome 100 kg d'acqua occupano un volume pari a 100 kg × (1 m^3/10^3 kg) = 0,1 m^3, il vostro volume è circa 0,1 m^3.

Ecco un altro modo per fare la stima. Se schematizziamo il corpo come una scatola di altezza h, larghezza l e profondità p, il volume sarà $V = h \times l \times p$ **.

Quanto valgono le tre dimensioni? L'altezza è facile, diciamo 2 m. Per la larghezza prenderemo l = 30 cm (una media tra testa, collo, torace, gambe e piedi).

Quanto a p, la profondità, sarà circa 20 cm (se non avete un torace troppo robusto). Quindi il volume totale è 200 × 30 × 20 = 1,2 × 10^5 cm^3.

E siccome 1 m^3 = 10^6 cm^3 ciò equivale all'incirca a 0,1 m^3, lo stesso valore trovato prima.

Ora per stimare le dimensioni di una cellula usiamo gli occhi. Le tacche di un righello sono spesse una frazione di millimetro, ossia meno di 10^{-3} m. Senza troppo sforzo riusciamo a vedere un oggetto grande un decimo di millimetro (10^{-4} m) ma in genere a occhio nudo non possiamo distinguere le sin-

* Facile dirlo, per noi che stiamo sul bordo della piscina.

** D'accordo, il nostro corpo non è un parallelepipedo; ma se non altro sono arrotondati i numeri che useremo.