COME SOPRAVVIVERE ALLA MATEMATICA

di Giulia Canzian e Dominique Cappelletti

Come potrete notare inoltrandovi nel corso di "Introduzione all'economia", l'interpretazione della teoria economica non presuppone conoscenze matematiche particolarmente elevate.

Tuttavia, quest' appendice è stata pensata per offrirvi delle "pillole matematiche" che formeranno un kit di sopravvivenza per affrontare sia la teoria economica, sia gli esercizi connessi. In particolare, l'obiettivo è dimostrarvi come i concetti matematici che probabilmente avete visto fino ad ora solo da un punto di vista teorico, si mettono al servizio degli studiosi per meglio spiegare la realtà economica che ci circonda.

1. La funzione matematica e la sua utilità in economia

Per capire l'utilità ed il senso di utilizzare le funzioni matematiche nello studio dell'economia, partiamo dal considerare alcuni semplici esempi legati alla vita di tutti i giorni.

"*Il caro petrolio rende salate le bollette degli italiani*"

"*Durante la crisi economica, le famiglie hanno visto diminuire i loro redditi ed infine a soffrirne è stato il consumo aggregato*"

"*Lo stipendio mensile di un lavoratore, dato il suo salario orario, dipende dal numero di ore lavorate*"

Sarete tutti d'accordo che le precedenti affermazioni posso essere reinterpretate affermando che le bollette degli italiani *sono funzione* del prezzo del petrolio, che i livelli di consumo aggregato *sono funzione* dei redditi delle famiglie, e che lo stipendio mensile *è funzione* del salario orario.

La funzione è quindi una relazione fra due variabili, ed in particolare essa è la relazione attraverso cui possiamo spiegare il legame esistente fra una variabile che chiamiamo dipendente ed una variabile che chiamiamo indipendente. In termini economici, la variabile dipendente è la variabile di cui vogliamo studiare l'andamento, mentre la variabile indipendente è quella variabile attraverso cui cerchiamo di spiegare la dipendente. Studiare il legame fra queste due variabili significa cercare di capire come varia una al variare dell'altra, in che direzione la prima cambia in seguito ad una specifica variazione della seconda.

Ritornando ai nostri esempi, nel caso del consumo e dei redditi delle famiglie, diremo che il consumo è la variabile dipendente e che il reddito delle famiglie è la variabile indipendente.

In termini formali, possiamo riassumere e stilizzare questa relazione con una semplice formula, scrivendo:

$$Consumo = f(reddito\ famiglie)$$

Essere ricorsi ad una formulazione matematica ci ha permesso di tradurre in termini sintetici una relazione che fino a questo punto era stata solamente figurata. La grande importanza della funzione matematica per lo studio dell'economia risiede appunto nel dare la possibilità all'economista di esprimere semplicemente e sinteticamente concetti complessi.

Facciamo ora un passo ulteriore per comprendere l'importanza e le peculiarità della funzione matematica. Abbiamo detto che la funzione è una relazione che lega due variabili, ma chiediamoci ora se la tipologia propria di questa relazione influisce sul legame fra variabili oppure no. La risposta è, come potete intuire, affermativa, ovvero, la tipologia di relazione esistente fra due variabili è vitale per capire il legame fra esse.

In questo senso la funzione può essere considerata una "macchina di trasformazione", il cui input è la variabile indipendente e il cui output è rappresentato dalla variabile dipendente. Graficamente:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) = y$$

Figura 1

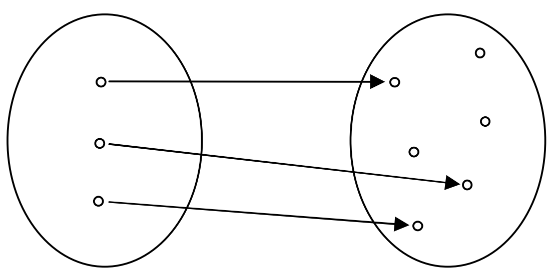
La forma della scatola è essenziale per capire la trasformazione. Considerate ad esempio la funzione radice quadrata, $y = \sqrt{x}$. Scomponendo l'espressione, possiamo dire che *y* è il risultato della trasformazione di *x* attraverso la "macchina" radice quadrata. Ancora, considerando l'elevamento a potenza, ad esempio $y = x^{2/5}$, arriviamo ad esplicitare la relazione dicendo che l'output, *y*, è il risultato dell'elevamento a potenza dell'input, *x*. Per input anche numericamente uguali, il risultato è sostanzialmente diverso.

Abbiamo insistito su questo concetto perché è importante distinguere fra la funzione, la "macchina", e le sue componenti/risultanti. Quando scriverete $y = \sqrt{x}$, ricordatevi che la funzione non è l'espressione nel suo complesso, ma solamente il simbolo "$\sqrt{}$", e che il risultato cambierà a seconda dei vari input che inserirete nella funzione.

Dopo questa breve digressione, ritorniamo alla definizione canonica di funzione matematica, che afferma:

"Dati due insiemi A e B, si definisce funzione quella particolare relazione che associa ad ogni elemento di A *uno ed un solo elemento* di B"

Considerando l'esempio dello stipendio di un lavoratore avremo:



A = ore lavorate B = stipendio

Figura 2

Per ogni elemento contenuto in A, la funzione associa ad esso uno ed un solo elemento contenuto in B. Questo significa che non possono verificarsi situazioni come la seguente:

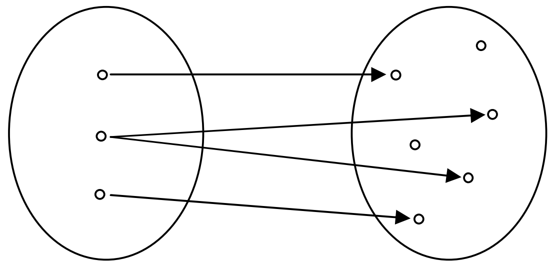


Figura 3

Considerando un gruppo omogeneo di lavoratori, che occupano la stessa posizione, ad ogni quantitativo di ore lavorate corrisponde uno ed un solo stipendio, e non una pluralità di stipendi.

L'insieme A e l'insieme B vengono definiti, rispettivamente, dominio e codominio della funzione. Il dominio è l'insieme di definizione della funzione, ovvero la scatola da dove *possiamo* estrarre le nostre variabili indipendenti, mentre il codominio è la scatola che contiene le variabili dipendenti. In particolare, si dice che il codominio è l'insieme dei valori della funzione, o anche che esso è l'insieme delle immagini della funzione.

Avrete notato che nelle frasi precedenti la parola "possiamo" è stata evidenziata: per quale motivo? Da un punto di vista matematico, le funzioni non sono definite per qualsiasi valore, infatti non sempre il dominio corrisponde con l'insieme dei numeri reali.

Da un punto di vista economico, la faccenda si fa ulteriormente complicata. Considerate ad esempio la seguente funzione: $y = \frac{1000}{x}$. La funzione in questione è, come vedremo fra poco, una fratta. Interpretando economicamente la relazione, immaginate che *y* sia il prezzo unitario al quale vogliamo vendere la quantità *x* di un bene. Il dominio matematico della funzione è rappresentato da tutti i valori di *x* diversi da zero, quindi, affinché la relazione abbia senso matematico, è sufficiente che *x* sia diverso da zero. Questo vuol anche dire che riusciremo a calcolare un'immagine della funzione, una *y,* anche per valori negativi della *x*.

Da un punto di vista economico, avrebbe senso farlo? E' possibile considerare quantità di bene negative da un punto di vista economico? La risposta è ovviamente no. Questo però ci porta a concludere che non sempre dominio matematico e dominio economico coincidono, e tale affermazione è particolarmente rilevante quando, ad esempio, andiamo a disegnare il grafico della funzione: di fronte ad una funzione come quella precedente, se foste di fronte ad un tema di matematica potreste utilizzare l'intero piano cartesiano con tutti e quattro i suoi quadranti; se foste invece di fronte ad un tema di economia, l'unico quadrante all'interno del quale potreste disegnare la funzione è il primo.

Quest'ultimo appunto sulla funzione ci porta ad addentrarci nell'analisi del grafico di una funzione e nello studio di cosa esso rappresenti.

Il grafico della funzione mostra visivamente quali valori assume la variabile *y* al variare della *x*: per questo motivo, il valore che assume la variabile *y* a seconda di ciascun valore della variabile *x* si chiama immagine della funzione, ovvero, si tratta dei valori che assume la funzione al variare di *x*.

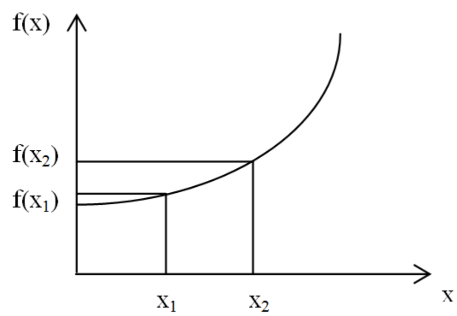


Figura 4

Il grafico precedente mostra l'esempio di una funzione monotona. Una funzione si dice tale qualora si verifichi una delle seguenti condizioni:

1)
$$\begin{array}{llll} i) & \forall\ x_1 \leq x_2 & \Rightarrow & f(x_1) \leq f(x_2) \\ ii) & \forall\ x_1 \geq x_2 & \Rightarrow & f(x_1) \geq f(x_2) \end{array}$$

Nel primo caso, la condizione di monotonicità afferma che per ogni x_1 minore o uguale a x_2, l'immagine di x_1 è anch'essa minore o uguale all'immagine di x_2. Nel secondo caso, la condizione di monotonicità afferma che per ogni x_1 maggiore o uguale a x_2, l'immagine di x_1 è anch'essa maggiore o uguale all'immagine di x_2. In altre parole, l'ordinamento delle variabili x è rispettato anche dalle rispettive immagini.

Un esempio di funzione non monotona è il grafico seguente:

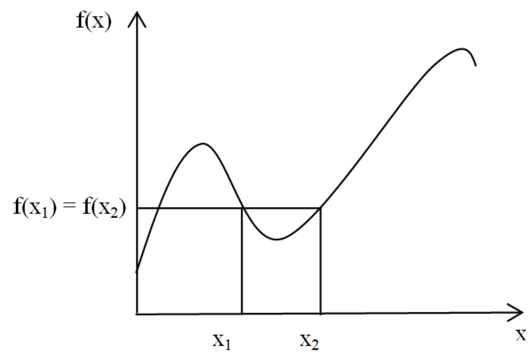


Figura 5

Esistono, infatti, valori di x tale per cui $x_2 \geq x_1$ per i quali la condizione $f(x_2) \geq f(x_1)$ non si verifica.

1.1 *Principali tipi di funzione: funzioni polinomiali*

Le funzioni più comuni, ed anche quelle che maggiormente vengono utilizzate durante il corso, sono le funzioni polinomiali. Il polinomio è la somma di più monomi non simili fra loro. I polinomi si dicono di grado *n*, dove *n* è il grado massimo dei monomi che lo compongono. Avremo quindi che se i monomi componenti un determinato polinomio hanno grado massimo pari a uno, il polinomio sarà di grado uno; se il grado massimo dei monomi è due, allora il polinomio avrà grado due; e così via per tutti i gradi maggiori di due.

Esempi di polinomi di vari gradi sono le espressioni:

$i)\quad y = 2x + 3$

$ii)\quad y = 5x^2 + 7x$

$iii)\quad y = 3x^6 + x^3 + 8$

Il primo polinomio è di I° grado , il secondo di II° grado, mentre il terzo di VI° grado.

Le funzioni polinomiali hanno come dominio l'intero insieme dei numeri reali.

1.1.1 Polinomi di primo grado. Rette

In generale, i polinomi di I° grado sono funzioni che hanno equazione:

2) $$f(x) = ax + b$$

e vengono definite funzioni lineari. Le funzioni lineari sono caratterizzate da proporzionalità diretta tra la variabile *y* e la variabile *x*. Due variabili si dicono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante.

Due variabili, invece, si dicono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante. La funzione $f(x) = \frac{c}{x}$, ad esempio, è caratterizzata da proporzionalità inversa.

Affermare che esiste proporzionalità diretta o inversa fra due variabili non implica considerazioni circa la quantificazione dell'impatto della variazione di una variabile sull'altra. In altre parole, dire che esiste proporzionalità diretta significa che se la variabile *x* aumenta, allora anche la variabile *y* aumenta; così come dire che esiste proporzionalità inversa implica che ad un aumento della *x* corrisponde una diminuzione della *y* e viceversa. Non implica invece che la variazione della *y*, di qualsiasi segno essa sia, sia proporzionale alla variazione della *x*.

La *y* varia in modo proporzionale rispetto alla *x* quando, ad esempio, ad una variazione del 50% di *x* corrisponde una variazione del 50% di *y*. La variazione di *y* è più che proporzionale rispetto alla variazione di *x* quando, ad esempio, se la *x* aumenta del 10%, la *y* registra un aumento del 20%. La variazione di *y* è meno che proporzionale rispetto alla variazione di *x* quando, ad esempio, se la *x* aumenta del 10%, la *y* registra un aumento del 5%.

Come potete notare, la quantificazione della proporzionalità non ha nulla a che vedere con il segno della proporzionalità: dire che *y* è variata meno che proporzionalmente rispetto ad *x*, non implica che la variazione della *y* abbia lo stesso segno della variazione della *x*. Potremo avere infatti, che se *x* aumenta del 30%, *y* diminuisca del 60%: in questo caso avremo una relazione di proporzionalità inversa e allo stesso tempo la *y* varierà più che proporzionalmente rispetto alla *x*.

Di particolare interesse per i nostri obiettivi è la caratterizzazione geometrica dei polinomi di primo e secondo grado. La maggior parte delle relazioni economiche che andremo a studiare è, infatti, rappresentabile attraverso questi due costrutti algebrici.

L'equazione del polinomio di primo grado rappresenta geometricamente l'equazione di una retta, nella sua forma generica:

3) $$y = ax + b$$

Il coefficiente *a* è detto *coefficiente angolare della retta*: esso misura la pendenza della retta e, da un punto di vista algebrico, dice di quanto varia la variabile *y* a seguito di una variazione unitaria della variabile *x*. Proprio per questo motivo la pendenza della retta si calcola come:

4) $$Pendenza = \frac{VARIAZIONE\ y}{VARIAZIONE\ x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

A variazioni di *x* possono corrispondere variazioni positive o negative della *y*, e per questo si parla di rette inclinate positivamente o negativamente. Se all'aumentare di *x* la *y* aumenta – vi è quindi una variazione positiva – si dice che la retta è inclinata positivamente, mentre se all'aumentare della *x* la *y* diminuisce – variazione negativa – la retta sarà inclinata negativamente.

Vediamo un esempio di retta inclinata negativamente:

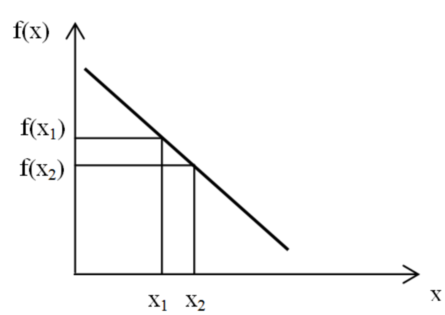


Figura 6

Nella figura 6, quando il valore della variabile *x* aumenta passando da x_1 a x_2, la variabile *y* diminuisce, infatti, $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Nel calcolo della pendenza risulterà:

5) $$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

Nell'equazione 3, il coefficiente *b* rappresenta l'intercetta della retta con l'asse delle ordinate. L'intercetta misura il valore dell'ordinata del punto in cui la retta in questione interseca l'asse delle ordinate. Per questo motivo, essa si calcola impostando il sistema:

6) $$\begin{cases} y = ax + b \\ x = 0 \end{cases}$$

dove $x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate.

Prima di concludere con le rette, un ultimo appunto riguardante coefficiente angolare e intercetta.

Se a variare è il coefficiente angolare, assistiamo ad una rotazione della retta, mentre se a variare è l'intercetta, avremo uno spostamento parallelo della retta verso l'alto o verso il basso.

1.1.2 Polinomi di secondo grado. Parabole

Per quanto riguarda i polinomi di secondo grado, dal punto di vista geometrico la loro equazione rappresenta l'equazione di una parabola:

7) $$y = ax^2 + bx + c$$

In particolare, l'equazione 7 rappresenta una parabola il cui asse di simmetria è parallelo all'asse delle ordinate, mentre l'equazione 8

8) $$x = ay^2 + by + c$$

rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse.

A seconda del segno del coefficiente *a*, la parabola avrà concavità rivolta verso il basso oppure verso l'alto: se *a* è positivo, la concavità sarà verso l'alto, mentre se *a* assume valori negativi la concavità della parabola sarà rivolta verso il basso.

Il coefficiente *c* rappresenta l'ordinata del punto in cui la parabola interseca l'asse delle ordinate; esso infatti si ricava risolvendo il sistema:

9) $$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$$

Al contrario, se l'obiettivo è trovare l'intersezione della parabola con l'asse delle ascisse, si risolverà il sistema:

10) $$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Le radici dell'equazione di secondo grado risultante dalla soluzione del sistema rappresentano le ascisse dei punti in cui la parabola interseca l'asse delle ascisse. Tali radici sono rappresentate da numeri reali se il discriminante dell'equazione è maggiore di zero; se il discriminante fosse minore di zero, l'equazione non avrebbe radici reali e quindi la parabola corrispondente non incrocia mai l'asse delle ascisse. Infine, qualora il discriminante sia uguale a zero, la parabola tange l'asse delle ascisse in un unico preciso punto. Riassumendo:

$$se \;\; \Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

11) $$se \;\; \Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad Nessuna\ radice\ reale$$

$$se \;\; \Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

2.1 *Altri tipi di funzione*

Dopo aver analizzato in dettaglio le funzioni polinomiali, rivolgiamo ora l'attenzione ad altri tipi di funzione che è necessario conoscere per lo studio dell'economia.

- *Funzioni fratte*

 Le funzioni fratte sono funzioni del tipo:

12) $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

 dove *p(x)* e *q(x)* sono due polinomi.

Queste funzioni esistono solo per valori della variabile *x* che non annullano il denominatore, e quindi il loro dominio è determinato ponendo il polinomio al denominatore diverso da zero.

- *Funzioni esponenziali*

 Le espressioni:

13) $$f(x) = a^x \qquad oppure \qquad f(x) = e^x$$

vengono definite funzioni esponenziali. In particolare, la prima equazione rappresenta una funzione esponenziale in base *a*, dove *a* è un numero reale positivo diverso da 1, mentre la seconda è una funzione esponenziale in base *e*, dove *e* è il numero di Nepero (*e* = 2,7183…).

Le esponenziali hanno per dominio l'intero insieme dei numeri reali.

Il loro grafico è rappresentato dalla curva:

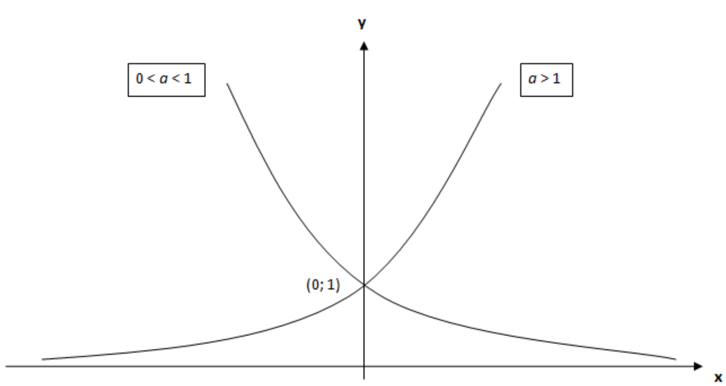


Figura 7

Il grafico delle esponenziali ha per asintoto l'asse delle ascisse, mentre interseca l'asse delle ordinate nel punto (0;1). Dal grafico della funzione si può notare che il valore della funzione esponenziale, *y*, è sempre positivo per qualsiasi valore assunto dalla variabile *x*.

Le funzioni esponenziali godono di alcune proprietà che è importante conoscere. Volendo riassumerle in un quadro sintetico:

$$
\begin{aligned}
&1.\ (a^x)^y = a^{x \cdot y}\\
&2.\ a^x \cdot a^y = a^{x+y}\\
&3.\ a^x : a^y = a^{x-y}\\
&4.\ (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x\\
&5.\ a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}\\
&6.\ a^0 = 1\\
&7.\ a^1 = a
\end{aligned}
$$

- *Funzioni logaritmiche*

Le funzioni logaritmiche hanno equazione:

14) $$f(x) = \log_a x$$

Così come per le funzioni esponenziali, anche le logaritmiche possono presentarsi con basi diverse. Le logaritmiche più utilizzate sono le funzioni in base naturale *e* e le funzioni in base 10, rispettivamente:

15) $$y = \log_e x = \ln x \qquad ; \qquad y = \log_{10} x = \log x$$

Le logaritmiche sono definite nell'intervallo dei numeri reali positivi. L'asintoto è costituito dall'asse delle ordinate, mentre il punto di intersezione della curva con l'asse delle ascisse è (1;0).

Il loro grafico è rappresentato dalla curva:

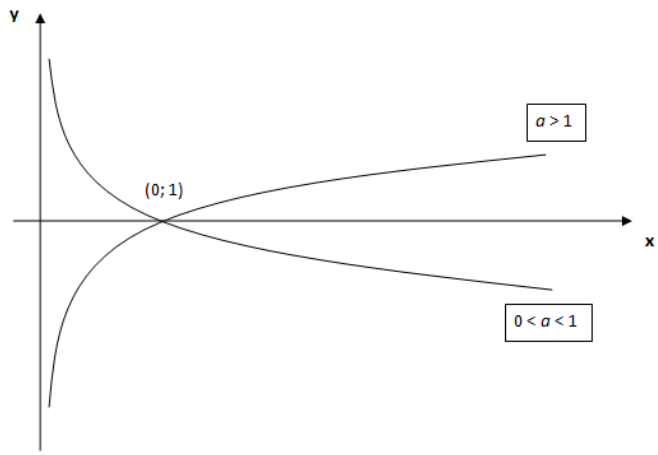


Figura 8

Esiste una stretta relazione fra funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche. Infatti vale sempre l'identità per la quale:

16) $$a^{\log_a x} = x$$

ovvero, il logaritmo è l'esponente che deve assumere *a* per ottenere x. Secondo la stessa logica, possiamo affermare che:

17) $$\log_a k = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = k$$