2. Calcolo differenziale

In economia si incontrano spesso dei problemi in cui è necessario studiare l'effetto della variazione di una grandezza economica su un'altra variabile. Possiamo essere interessati, ad esempio, a come varia il costo totale sostenuto da un'impresa al variare dell'output da essa prodotto, oppure potremo essere interessati a come varia la soddisfazione totale che un consumatore si procura dal consumo di un paniere di beni qualora la quantità consumata di un bene appartenente al paniere aumentasse.

Nel caso di relazioni lineari, abbiamo visto che studiare l'effetto di una variazione della variabile x sulla variabile y equivale a calcolare la pendenza della retta. In particolare, tale effetto risulta essere costante qualsiasi siano i punti della retta che stiamo considerando.

Nel caso invece di relazioni non lineari, la pendenza della funzione non è così facilmente valutabile, e dobbiamo quindi ricorrere al calcolo differenziale. In questo caso infatti, il tasso di variazione non è costante, proprio in virtù della non linearità che lega le due variabili in esame: data una funzione non lineare $y = f(x)$, l'effetto di una variazione della variabile x, che passa da (x_0) a $(x_0 + h)$, sulla variabile y è quindi diverso a seconda dei due punti (x_0) e $(x_0 + h)$ che si considerano.

Per avere il valore della pendenza della funzione in un punto – che data la sua non linearità assume una forma curvilinea – è necessario considerare una porzione infinitamente piccola tale che i due punti (x_0) e $(x_0 + h)$ siano quasi indistinguibili, e analizzare come varia il valore di y (ovvero, f(x)) tra questi due punti. Formalmente, si tratta di calcolare il limite della funzione[1] nell'infinitesimo intorno di x_0:

18) $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se questo limite esiste ed è finito, si dice che la funzione f è derivabile nel punto x_0 e $f'(x_0)$, indicata anche come $\frac{df(x_0)}{dx}$, è la derivata della funzione f nel punto x_0.

[1] Si ricorda che calcolare il limite di una funzione significa valutare il comportamento della funzione nell'intorno di un punto

Dal punto di vista geometrico, essa rappresenta la pendenza della retta *tangente* al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$, e la sua analisi ci permette di stabilire in che modo la variabile x influenza l'andamento della variabile y.

In particolare, il <u>segno della derivata prima</u> fornisce un'informazione sulla crescenza e decrescenza della funzione:

- se $f'(x) > 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è strettamente *crescente* nell'intervallo (a, b);
- se $f'(x) < 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è strettamente *decrescente* nell'intervallo (a, b);
- se $f'(x) = 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è *costante* nell'intervallo (a, b).

Il calcolo delle derivate prime avviene in base a strumenti matematici standardizzati regole di derivazione che esponiamo brevemente di seguito:

<u>Derivate di funzioni elementari</u>

	$f(x)$	$f'(x)$	Casi particolari
Funzione costante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	
Funzione potenza	$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	Se $k = -1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ Se $k = -n$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ Se $k = \frac{1}{2}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Se $k = \frac{1}{n}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Funzione esponenziale	$f(x) = k^x$	$f'(x) = k^x \ln k$	Se $k = e$, $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$
Funzione logaritmica	$f(x) = log_k\, x$	$f'(x) = \frac{1}{x} log_k e$ $= \frac{1}{x} \frac{1}{\ln k}$	Se $k = e$, $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

Regole di derivazione

Regola della somma	$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
Regola del prodotto	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Regola del quoziente	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$
Regola delle funzioni composte	$y = g(f(x))$	$y' = g'(f(x)) * f'(x)$

Esempio: Data la funzione $f(x) = (2x+3)^3$, la sua derivata è $f'(x) = 6 \cdot (2x+3)^2$.

Esempio: Data la funzione $f(x) = e^{2x}$, la sua derivata è $f'(x) = 2e^{2x}$.

Se la derivata prima della funzione f è derivabile, può essere derivata a sua volta, ottenendo così la derivata seconda della funzione f, che si indica come $f''(x)$ oppure $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Il segno della derivata seconda fornisce un'informazione sulla concavità e convessità della funzione f:

- se $f''(x) > 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è strettamente *convessa* nell'intervallo (a, b);
- se $f''(x) < 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è strettamente *concava* nell'intervallo (a, b);
- se $f''(x) = 0$ per ogni x appartenente ad un intervallo (a, b), la funzione è né *concava* né *convessa* nell'intervallo (a, b).

Combinando le informazioni fornite dai segni delle derivate prima e seconda, si ottengono delle indicazioni sulla forma della funzione in un intervallo, come mostra la Figura 9.

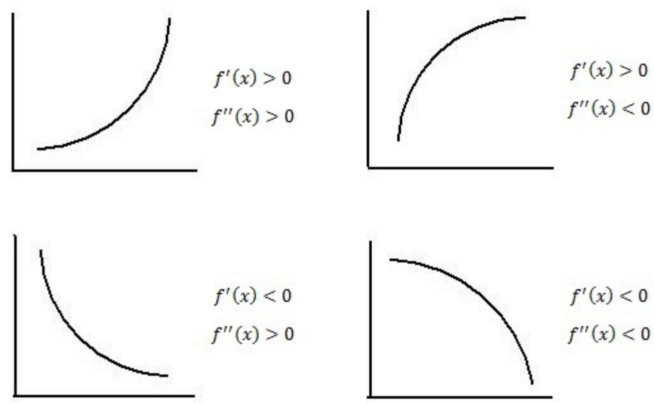

Figura 9

Se la derivata seconda della funzione f è derivabile, può essere derivata a sua volta, ottenendo così la derivata terza della funzione f, che si indica come $f'''(x)$ oppure $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$. Seguendo lo stesso procedimento, è possibile calcolare le derivate successive.