3. Problemi di ottimizzazione con una variabile decisionale

Come potrete vedere durante il corso, molto spesso l'interesse dell'economista si concretizza nella ricerca di una soluzione ottima. Ipotizzando che gli agenti economici si comportino perseguendo il loro massimo benessere, essi tenteranno sempre di cercare la soluzione che massimizza il loro benessere e i loro obiettivi in generale. In termini matematici, ricercare la soluzione ottima significa risolvere un problema di massimizzazione, ovvero, ricercare quei valori che rendono massima o minima una funzione.

Un esempio di problema di massimizzazione è fornito da un consumatore che cerca di massimizzare il livello di soddisfazione (definita in economia con il termine *utilità*) che trae dal consumo di beni che acquista sul mercato. Tra tutte le alternative a lui disponibili, sceglierà la migliore, cioè quella che gli procura la massima soddisfazione.

Un altro esempio è fornito da un'impresa che cerca di massimizzare il profitto, definito come differenza tra quanto ricava dalla vendita di una certa quantità di output e i costi necessari per produrre tale quantità. La variabile decisionale del problema è la quantità di output da produrre e, tra tutte quelle appartenenti all'insieme ammissibile, l'impresa sceglierà la quantità ottima, cioè quella per cui il profitto ottenibile è massimo.

Un esempio di problema di minimizzazione è quello di un'impresa che deve determinare la quantità ottima di input da immettere nel processo produttivo al fine di minimizzare i costi di produzione.

Come prima cosa, diamo una definizione di punti di massimo e di minimo, facendo una distinzione tra punti di massimo e di minimo *assoluto* (o globale) e punti di massimo e di minimo *relativo* (o locale).

Un problema di ottimizzazione è costituito da 3 elementi:

- una o più variabili decisionali, che sono le variabili per cui si devono determinare i valori ottimali;
- una funzione obiettivo, che è la funzione da massimizzare o minimizzare;
- un insieme ammissibile, che è l'insieme delle alternative disponibili.

In questa parte considereremo solamente problemi con una sola variabile decisionale, mentre affronteremo problemi con più variabili decisionali in paragrafi successivi.

Un problema di ottimizzazione con una sola variabile decisionale assume quindi la seguente forma:

$$max\ [\text{o}\ min]\ \ f(x)$$
$$\text{con } x \in S$$

dove $f(x)$ è la funzione obiettivo, x è la variabile decisionale e S è l'insieme ammissibile.

La soluzione di questo problema è il valore (o i valori) della variabile decisionale x che appartiene all'insieme ammissibile e che produce il valore massimo (o minimo) della funzione obiettivo.

Di fatto, i punti di massimo e di minimo possono essere molteplici per una funzione data, per questo è utile offrire una prima caratterizzazione di queste tipologie:

- x_0 è un punto di *massimo assoluto* della funzione $f(x)$ se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in S$. Il valore della funzione calcolata in x_0, cioè $f(x_0)$, è il massimo valore che la funzione può assumere.
- x_0 è un punto di *minimo assoluto* della funzione $f(x)$ se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in S$. Il valore della funzione calcolata in x_0, cioè $f(x_0)$, è il minimo valore che la funzione può assumere.
- x_0 è un punto di *massimo relativo* della funzione $f(x)$ se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni x appartenente ad un intorno di x_0. Il valore della funzione calcolata in x_0, cioè $f(x_0)$, è il massimo valore che la funzione può assumere in un intervallo, anche molto piccolo, contenente x_0 al suo interno.
- x_0 è un punto di *minimo relativo* della funzione $f(x)$ se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni x appartenente ad un intorno di x_0. Il valore della funzione calcolata in x_0, cioè $f(x_0)$, è il minimo valore che la funzione può assumere in un intervallo, anche molto piccolo, contenente x_0 al suo interno.

Ogni punto di massimo e di minimo assoluto è anche un punto di massimo e di minimo relativo.

I punti di massimo o di minimo possono trovarsi all'interno dell'insieme ammissibile oppure agli estremi di tale insieme, e a seconda della loro posizione cambia la procedura di calcolo che è possibile utilizzare.

3.1 Massimi e minimi interni

Per quanto riguarda i massimi e i minimi interni all'insieme ammissibile, se la funzione obiettivo $f(x)$ è continua e derivabile nell'insieme ammissibile, allora tutti i punti di massimo e di minimo sono necessariamente punti stazionari (detti anche punti critici o estremanti), cioè punti dove la derivata prima si annulla. Il fatto che la derivata prima si annulli significa che in quel determinato punto la funzione è costante, ovvero, non è né crescente né decrescente: da qui la definizione di punto stazionario, un punto cioè in cui la funzione possiamo dire che "non si muove". A partire da questo punto, la funzione può poi crescere o decrescere, ed è proprio in base a questo movimento successivo che, come vedremo, possiamo determinare la natura del punto stazionario trovato.

La condizione necessaria per trovare i punti stazionari, la condizione affinché un punto x_0 sia un punto di massimo o minimo interno all'insieme ammissibile, è quindi che la derivata prima calcolata in quel punto sia pari a zero, cioè $f'(x_0) = 0$. Questa condizione viene definita *condizione del primo ordine*. Essa non è però sufficiente: un punto stazionario non è necessariamente un punto di massimo o di minimo.

Occorre quindi trovare tutti i punti stazionari e determinare se tra questi vi sono punti di massimo o di minimo. Per fare questo, si possono seguire due metodi.

<u>1° METODO: studio del segno della derivata prima</u>

Lo studio del segno della derivata prima serve per determinare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce, facendoci comprendere se i punti trovati sono di massimo o di minimo o di flesso.

- x_0 è un punto di *massimo* se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x) > 0$ a sinistra di x_0 e $f'(x) < 0$ a destra di x_0;
- x_0 è un punto di *minimo* se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x) < 0$ a sinistra di x_0 e $f'(x) > 0$ a destra di x_0.

Invece, se la derivata nell'intorno di x_0 non cambia di segno, x_0 non è né un punto di massimo né un punto di minimo.

2° METODO: metodo della derivata seconda

Una volta calcolata la derivata prima e trovati i punti stazionari, si calcola la derivata seconda; si sostituiscono poi le coordinate dei punti stazionari nella derivata seconda e si guarda il segno che questa assume. Il segno della derivata seconda indica se la curva è concava ($f''(x) < 0$) oppure convessa ($f''(x) > 0$).

- x_0 è un punto di *massimo* se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$;
- x_0 è un punto di *minimo* se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

Invece, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, il criterio della derivata seconda non conduce a risultati definitivi e occorre analizzare il segno delle derivate di ordine superiore.

3.2 Massimi e minimi di frontiera

Se l'insieme ammissibile S è un intervallo chiuso [*a*,*b*] , oltre ai punti stazionari interni e ai possibili massimi e minimi interni, anche i valori estremanti dell'intervallo possono essere a loro volta punti di massimo o minimo, chiamati a questo punto di frontiera.

Una volta calcolati i valori della funzione in corrispondenza di *a* e *b*, occorre confrontare i valori della funzione calcolata nei punti stazionari con i valori della funzione calcolata nei punti di frontiera: il più grande di questi valori è il valore massimo della funzione, mentre il più piccolo di questi valori sarà il valore minimo della funzione.