4. Funzioni di più variabili indipendenti

Finora abbiamo considerato funzioni con una sola variabile dipendente. La maggior parte delle grandezze che si incontrano in economia, però, dipendono dai valori assunti da più variabili indipendenti.

Se ricordate l'esempio fatto all'inizio della dispensa, dire che i consumi delle famiglie dipendono solo dal livello dei loro redditi potrebbe essere riduttivo, perché possiamo con buona approssimazione affermare che essi siano influenzati da una molteplicità di fattori. Oppure, possiamo considerare il caso di un'impresa che produce un certo bene (output) impiegando generalmente *n* fattori produttivi (input). In questo caso, la funzione di produzione dell'impresa, che mette in relazione le quantità di fattori produttivi impiegati nel processo produttivo e la quantità di prodotto ottenibile da essi, è quindi una funzione in *n* variabili indipendenti. Analogamente, la funzione di utilità di un consumatore, che mette in relazione la quantità di ciascuno degli *n* beni consumati (detto *paniere* di beni) con il livello di soddisfazione che il consumatore trae dal consumo di tale paniere, è una funzione in *n* variabili indipendenti.

In questa sede ci limiteremo a considerare funzioni con due variabili indipendenti, che presentano il grosso vantaggio di poter essere rappresentate graficamente. L' analisi può comunque essere generalizzata al caso di funzioni in *n* variabili indipendenti.

Una funzione in due variabili indipendenti assume la forma $z = f(x, y)$ e rappresenta una legge che associa ad ogni coppia di valori (x, y) uno e un solo valore di z.

Graficamente, tale funzione è rappresentata da un grafico a tre dimensioni. Ogni punto del grafico è identificato da una tripletta di valori (x, y, z): x è rappresentata sull'asse delle ascisse, y sull'asse delle ordinate e z sull'asse delle quote.

Consideriamo ad esempio la funzione $z = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$. Il grafico di questa funzione è riportato in Figura 10.

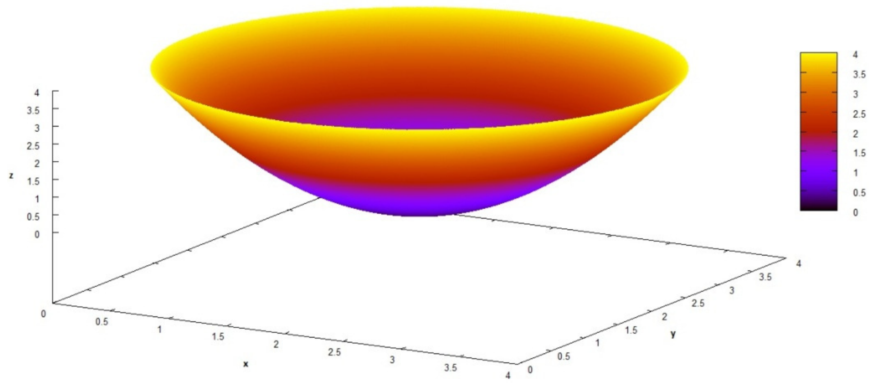

Figura 10: grafico di $\boldsymbol{z = (x-2)^2 + (y-2)^2}$

La rappresentazione di un grafico a tre dimensioni richiede una certa abilità di disegno. Tuttavia, esiste un metodo che consente di rappresentare grafici tridimensionali su un piano cartesiano. Tale metodo utilizza le *curve di livello* ed è il metodo utilizzato, ad esempio, nelle carte geografiche. Si tratta di rilevare tutti i punti che hanno la stessa quota e proiettare il luogo geometrico di tali punti (x, y) sul piano orizzontale xy. La figura 11 riporta il grafico della funzione e alcune curve di livello relative alla funzione.

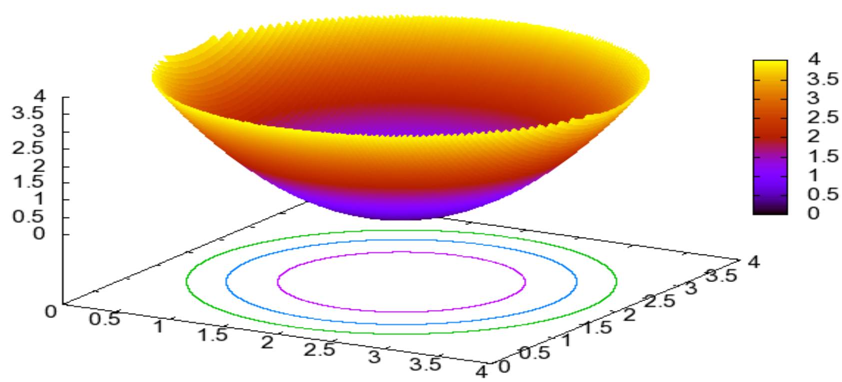

Figura 11: grafico di $\boldsymbol{z = (x-2)^2 + (y-2)^2}$ con alcune curve di livello.

Il concetto di curva di livello ha numerose applicazioni in economia. Ad esempio, se consideriamo una funzione di produzione, una curva di livello rappresenta tutte le combinazioni di fattori produttivi che producono la stessa quantità di output e viene definita *isoquanto*. Nel caso invece di una funzione di utilità, una curva di livello rappresenta tutti i panieri di beni che forniscono al consumatore la stessa utilità totale e viene definita *curva di indifferenza*. Consideriamo un consumatore, la cui utilità derivante dal consumo delle quantità x e y di due beni è rappresentata dalla seguente funzione $U(x, y) = x \cdot y$. Una generica curva di indifferenza avrà equazione $x \cdot y = C$, dove *C* è una costante, e assumerà la forma di un'iperbole.