5. Derivate parziali

Abbiamo visto come, nel caso di funzioni in una sola variabile indipendente, il concetto di derivata ci dia l'informazione dell'effetto che una variazione della variabile indipendente ha sulla variabile dipendente.

Nel caso di funzioni in due variabili indipendenti, se siamo interessati a studiare l'effetto della variazione di una sola delle due variabili indipendenti sulla variabile dipendente dobbiamo ricorrere al concetto di derivata parziale.

Data una funzione in due variabili indipendenti, $z = f(x, y)$, la derivata parziale rispetto a x è la derivata della funzione rispetto a x mantenendo y costante e viene indicata con $f'_x(x, y)$ oppure con $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Formalmente, si definisce derivata parziale rispetto a x della funzione $z = f(x, y)$ il seguente limite, se esiste ed è finito:

19) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Il termine "parziale" indica il fatto che non si sta calcolando la variazione totale della funzione, ma una variazione parziale dovuta solo alla variazione di x, mentre y è mantenuta costante.

Analogamente, la derivata parziale rispetto a y della funzione $z = f(x, y)$ è la derivata della funzione rispetto a y mantenendo x costante e viene indicata con $f'_y(x, y)$ oppure con $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Formalmente, si definisce derivata parziale rispetto a y della funzione $z = f(x, y)$ il seguente limite, se esiste ed è finito:

20) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Per calcolare le derivate parziali, si usufruiscono le stesse regole che vengono utilizzate per il calcolo delle derivate ordinarie.

Esempio: Data la funzione $f(x,y) = x^2 + 7xy + y^2$, la derivata parziale rispetto a x è $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 7y$ e la derivata parziale rispetto a y è $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 7x + 2y$.

Nei problemi che si incontrano in economia, l'interpretazione della derivata parziale dipende dalla funzione che si sta considerando. Ad esempio, consideriamo una funzione di produzione $Q = f(L,K)$, che mette in relazione la quantità di fattori produttivi lavoro L e capitale K impiegati nel processo produttivo e la quantità di prodotto Q ottenibile da esse. La derivata parziale della funzione di produzione rispetto a L misura la variazione del prodotto Q dovuta ad una variazione della quantità di lavoro L impiegata e viene definita come *produttività marginale del lavoro* (PML). Analogamente, la derivata parziale della funzione di produzione rispetto a K misura la variazione del prodotto Q dovuta ad una variazione della quantità di capitale K impiegata e viene definita come *produttività marginale del capitale (PMK).*

Se invece consideriamo una funzione di utilità $U = f(x,y)$, dove x e y rappresentano le quantità consumate dei beni x e y, la derivata parziale rispetto a x misura la variazione dell'utilità derivante da una variazione della quantità consumata del bene x e viene definita *utilità marginale del bene* x. Analogamente, la derivata parziale rispetto a y misura la variazione dell'utilità derivante da una variazione della quantità consumata del bene y e viene definita *utilità marginale del bene* y.

Come abbiamo visto in precedenza, la derivata seconda di una funzione è la derivata della derivata di quella funzione. Nel caso di funzioni in due variabili indipendenti, ognuna delle due derivate parziali prime può essere derivata rispetto alle due variabili indipendenti. Quindi, la funzione avrà 4 derivate parziali seconde. Data una funzione $z = f(x,y)$, si definisce

- derivata parziale seconda pura rispetto a x la derivata parziale rispetto a x della derivata parziale prima rispetto a x e si indica come z''_{xx} oppure $f''_{xx}(x,y)$ oppure $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$;

- derivata parziale seconda pura rispetto a y la derivata parziale rispetto a y della derivata parziale prima rispetto a y e si indica come z''_{yy} oppure $f''_{yy}(x,y)$ oppure $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$;
- derivata parziale seconda mista rispetto a x la derivata parziale rispetto a x della derivata parziale prima rispetto a y e si indica come z''_{yx} oppure $f''_{yx}(x,y)$ oppure $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$;
- derivata parziale seconda mista rispetto a y la derivata parziale rispetto a y della derivata parziale prima rispetto a x e si indica come z''_{xy} oppure $f''_{xy}(x,y)$ oppure $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$.