6. Problemi di ottimizzazione con due variabili decisionali

Come abbiamo visto in precedenza, risolvere un problema di ottimizzazione si traduce, in termini matematici, nel trovare quel valore o quei valori della variabile indipendente in corrispondenza dei quali la funzione obiettivo raggiunge il suo valore massimo o minimo. Abbiamo visto che, affinché un punto *interno* al dominio della funzione sia un punto di massimo o di minimo, tale punto deve necessariamente essere un punto stazionario, cioè la derivata prima deve annullarsi in quel punto.

Per una funzione in due variabili indipendenti valgono delle condizioni analoghe: affinché un punto (x_0, y_0) *interno* al dominio della funzione sia un punto di massimo o di minimo, entrambe le derivate parziali prime calcolate in quel punto devono essere pari a zero. Tali condizioni vengono definite *condizioni del primo ordine*. Formalmente,

$$21) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Una volta individuati i punti stazionari, occorrerebbe stabilire quali tra essi sono punti di massimo o di minimo. Questo però richiede l'applicazione di metodi che utilizzano il calcolo matriciale e che non trattiamo in questa sede. Ci limitiamo dunque ad individuare i punti stazionari, mentre per l'esistenza di un massimo o di un minimo ci affidiamo alle ipotesi economiche formulate in alcuni modelli. Ad esempio, se la funzione in esame è strettamente concava, il punto stazionario individuato sarà un massimo. È possibile comunque fare una verifica calcolando il valore della funzione in altri punti.

6.1 Problemi di ottimizzazione vincolata

Fin qui abbiamo visto come risolvere problemi di ottimizzazione in cui non vi è alcuna restrizione sui valori delle variabili indipendenti che possono costituire la soluzione ottima del problema. Questi problemi vengono chiamati problemi di ottimizzazione libera o non vincolata.

Molto spesso però nei problemi economici di ottimizzazione l'insieme delle possibili soluzioni del problema è sottoposto a delle limitazioni. Si pensi ad esempio ad un consumatore. Nello scegliere il paniere di beni che massimizza la sua utilità, il consumatore dovrà limitarsi a scegliere tra quelli che il suo reddito disponibile gli consente di acquistare. Il consumatore deve dunque rispettare un vincolo di bilancio, che restringe l'insieme S delle soluzioni ammissibili.

In questa sede ci limitiamo a considerare l'esempio più semplice di ottimizzazione vincolata, cioè un problema con una funzione in due variabili indipendenti ristretta da un vincolo in forma di uguaglianza.

Consideriamo un consumatore, la cui utilità derivante dal consumo delle quantità x e y di due beni è rappresentata dalla seguente funzione: $U(x, y) = x \cdot y$

Supponiamo che ogni unità del bene x costi € 50 e ogni unità del bene y costi € 25. Supponiamo inoltre che il consumatore abbia un reddito disponibile di € 1000 che intende spendere interamente per l'acquisto dei due beni. Se il consumatore si pone l'obiettivo di massimizzare la propria utilità, dovrà affrontare il seguente problema:

$$\begin{aligned} &\max \quad U(x, y) = x \cdot y \\ &\qquad \textit{sotto il vincolo} \quad 50x + 25y = 1000 \end{aligned}$$

dove $50x + 25y = 1000$ rappresenta il vincolo di bilancio che deve essere rispettato dal consumatore.

Vi sono diversi metodi per risolvere questo problema.

Un primo metodo, detto *metodo di sostituzione diretta*, prevede di esplicitare il vincolo, cioè di esprimere una variabile in funzione dell'altra, e sostituire questa espressione nella funzione obiettivo. La funzione così ottenuta non è soggetta ad alcun vincolo e può essere massimizzata con le tecniche viste in precedenza.

Esplicitiamo il vincolo riscrivendolo come y funzione di x, ottenendo $y = 40 - 2x$. Ora sostituiamo questa espressione nella funzione obiettivo. La nuova funzione obiettivo è

$$\max \quad U(x) = 40x - 2x^2$$

Come potete notare, la nuova funzione obiettivo è una funzione ad una variabile indipendente e quindi possiamo massimizzarla secondo i metodi visti in precedenza. La derivata prima di questa funzione è $\frac{dU(x)}{dx} = 40 - 4x$

A questo punto, è possibile trovare i punti critici ponendo la derivata prima uguale a zero, $40 - 4x = 0$, da cui si ottiene $x^* = 10$.

Abbiamo dunque stabilito la quantità ottima di bene x. Per trovare la quantità ottima di bene y, occorre sostituire la quantità ottima di bene x^* trovata nel vincolo, ottenendo $y^* = 20$.

Questo metodo, che è facilmente estendibile a problemi con più variabili e più vincoli di uguaglianza, è molto semplice, ma a volte non conveniente dal punto di vista pratico, come ad esempio nel caso di vincoli non lineari.

Un altro metodo di risoluzione è il cosiddetto *metodo del moltiplicatore di Lagrange*. Dato il seguente problema

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y) \\ & s.v. \quad g(x, y) = c \end{aligned}$$

dove $f(x, y)$ è la funzione obiettivo e $g(x, y) = c$ è il vincolo, questo metodo richiede di definire una nuova funzione, detta *funzione lagrangiana*, che assume la seguente forma:

22) $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c]$$

La nuova variabile λ è detta moltiplicatore di Lagrange. Con la definizione della funzione lagrangiana abbiamo trasformato un problema di massimizzazione vincolata in uno di massimizzazione libera. Tuttavia, la nuova funzione obiettivo è una funzione a più variabili indipendenti, e per massimizzarla dovremo quindi calcolare le derivate parziali prime della funzione e porle tutte contemporaneamente uguali a zero:

23) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Nell'esempio del consumatore visto sopra, la funzione lagrangiana è

$L(x,y,\lambda) = x \cdot y - \lambda(50x + 25y - 1000)$

Le condizioni del primo ordine sono

24) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = y - 50\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = x - 25\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -50x - 25y + 1000 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene la soluzione ottima $(x^*, y^*) = (10, 20)$.

Il metodo di Lagrange può essere applicato anche in problemi con più variabili e più vincoli di uguaglianza utilizzando tanti moltiplicatori di Lagrange (diversi tra loro) quanti sono i vincoli.