Sistemi di controllo digitali

Concetti introduttivi

I *sistemi di controllo digitali* o *a tempo discreto* si distinguono dai *sistemi di controllo analogici* o *a tempo continuo* in quanto caratterizzati dalla presenza di un computer che svolge le funzioni che nei sistemi analogici sono proprie del nodo comparatore, dell'amplificatore di segnale e delle reti correttrici; tali sistemi vengono anche denominati *sistemi di controllo a dati campionati* in quanto la trasmissione e l'elaborazione dei segnali avviene per campioni espressi da dati numerici inviati in sequenza; molti dei concetti e delle procedure di uso corrente utilizzate per lo studio di questi sistemi sono modifiche o estensioni di quelli, analoghi, che caratterizzano l'analisi dei sistemi a tempo continuo. In particolare la trasformata di Laplace viene sostituita dalla *trasformata Z* che consente la definizione e l'elaborazione delle f.d.t. discrete, l'introduzione della funzione di risposta armonica discreta e l'estensione al tempo discreto dei più importanti procedimenti di sintesi nel dominio delle frequenze (criteri di Bode e di Nyquist).
La *trasformata Z* converte sequenze di numeri in una funzione $F(z)$ della variabile complessa z; la soluzione di *equazioni alle differenze* tipiche di questi sistemi (sono l'analogo delle equazioni differenziali dei sistemi analogici) viene così ricondotta alla soluzione di equazioni algebriche; il passaggio inverso (antitrasformazione) avviene come nel caso della trasformata di Laplace ovvero per suddivisione in frazioni semplici e successivo impiego di tabelle.
Le trasformate Z assumono espressioni semplici se le corrispondenti successioni derivano dal campionamento di funzioni del tempo la cui trasformata di Laplace è compresa in quelle di tipo elementare.
Importante è inoltre la seguente considerazione: la trasformata Z della successione dei campioni di una funzione del tempo la cui trasformata di Laplace è razionale fratta è anch'essa razionale fratta.
In figura 1 viene riportato lo *schema a blocchi di un sistema di controllo digitale*; r è il segnale di riferimento in forma analogica, r_d il segnale di riferimento trasformato in digitale, m_d la variabile manipolabile in forma digitale elaborata dal computer, m la variabile manipolabile dopo la conversione in forma analogica, d un generico disturbo, c la variabile controllata in forma analogica, w il segnale di retroazione in forma analogica, w_d il segnale di retroazione dopo la conversione in forma digitale.

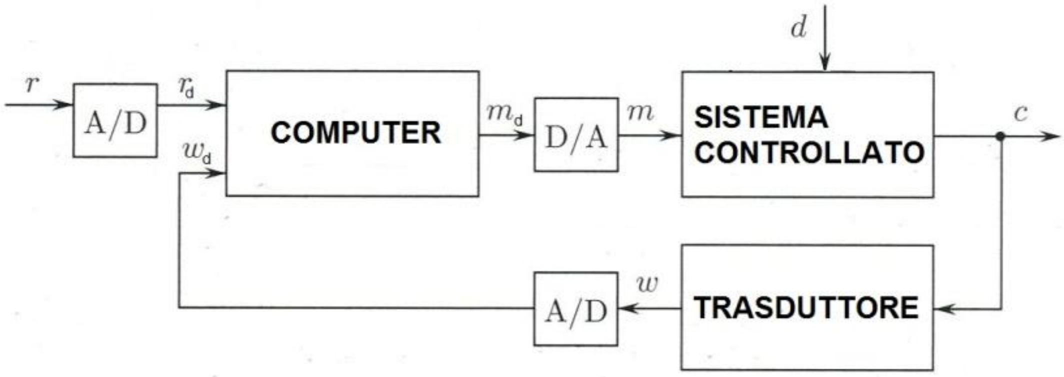

Figura 1 Schema a blocchi di un sistema di controllo digitale

Alcuni problemi che si riscontrano nel progetto di un sistema di controllo digitale sono quelli connessi con le conversioni A/D e D/A come ad esempio il campionamento del segnale, la sua ricostruzione e il fenomeno dell'aliasing.

Vantaggi e svantaggi

I principali vantaggi derivanti dall'impiego dei sistemi di controllo digitali sono:
- *Maggiore precisione dell'elaborazione*: infatti l'elaborazione numerica dei segnali consente l'utilizzazione di algoritmi più sofisticati, praticamente senza alcun limite per complessità dei programmi, che possono comprendere anche verifiche, messaggi all'operatore, registrazione continua dei dati; non vi sono inoltre limiti per il numero di cifre significative dei dati se non quello della velocità di elaborazione.
- *Maggiore flessibilità*: mentre nel caso dei sistemi analogici è necessario modificare fisicamente il regolatore a seconda del particolare sistema controllato (pur ottenendo una buona adattabilità con i regolatori standard PID), nel caso digitale è sufficiente modificare il programma (cioè intervenire sul software), mantenendo lo stesso elaboratore.
- *Maggiore affidabilità e ripetibilità*: l'elaborazione numerica è sempre identica, mentre quella analogica può variare per modifiche delle caratteristiche elettriche dei componenti, dovute a fattori ambientali o a deterioramento.
- *Maggiore sensibilità e trasmissibilità dei segnali*: la sensibilità è concentrata nel codificatore; l'elaborazione digitale non presenta soglie o saturazioni; la trasmissione a distanza è priva di errori essendo i segnali codificati; vengono eliminati i disturbi, in particolare quelli a frequenza di rete provenienti da apparati di potenza.

I principali svantaggi derivanti dall'impiego dei sistemi di controllo digitali sono:
- *Progettazione più difficile e articolata*: infatti vi si richiede una doppia competenza, cioè sui sistemi dinamici ad evoluzione continua e sugli elaboratori digitali.
- *Problemi di stabilità*: la discontinuità nella trasmissione dell'informazione legata al campionamento implica ritardi negli interventi di regolazione e, quindi, maggiore difficoltà nella stabilizzazione degli anelli di regolazione; il problema più importante nel progetto di un apparato di controllo digitale è quindi la scelta del periodo di campionamento che implica un compromesso fra la bontà della regolazione e l'impegno dell'elaboratore.
- *Possibilità di arresti non previsti dovuti a disturbi*: se la programmazione non è così accurata da prevedere il superamento di tutte le situazioni anomale provocate da eventuali disturbi, il calcolatore si può bloccare, interrompendo improvvisamente la regolazione, per cui è necessario che tutti i transitori del sistema digitale,anche quelli corrispondenti a stati iniziali non di routine, vengano analizzati e controllati con cura.
- *Necessità di impiego dell'energia elettrica*: i sistemi digitali sono sempre elettronici, mentre quelli analogici standard (tipo PID) possono essere di tipo pneumatico e spesso preferibili in ambienti ad alto rischio di esplosione ed incendio.

Campionatore ZOH

Il segnale campionato può essere reso continuo utilizzando differenti modalità; nella maggior parte dei casi viene impiegato il *campionatore ZOH* (*Zero-Order-Hold*) che associa a ciascun valore discreto un livello che viene mantenuto costante per tutto il periodo di campionamento; la f.d.t. del campionatore è la seguente:

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Nella formula compare il periodo di campionamento T che deve essere sufficientemente piccolo se confrontato con variazioni significative dei segnali coinvolti nel sistema; stabilito sul diagramma del modulo il punto di attraversamento a 0 dB della f.d.t. d'anello, si può scegliere come valore del periodo di campionamento

$$T = \frac{1}{10\omega_0}$$

er lo studio della stabilità e delle caratteristiche statiche e dinamiche i possono usare dei particolari accorgimenti; si può ad esempio considerare il blocco di trasformazione ZOH come facente parte dell'impianto ponendolo in serie a tutti gli altri blocchi della catena; lo schema equivalente viene riprodotto in figura 2, essendo G(s) la f.d.t. complessiva del sistema considerato analogico.

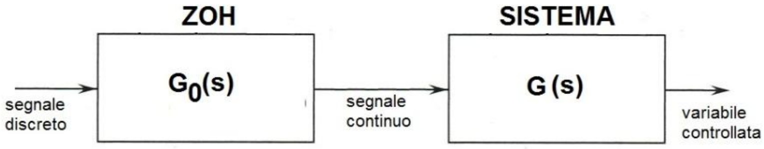

Figura 2 Schema a blocchi equivalente del sistema di controllo

L'introduzione del campionatore ZOH a monte del sistema e l'impiego del suo modello consente la trasformazione di un sistema tempo continuo nel suo equivalente tempo discreto con f.d.t. data dal prodotto del campionatore e del sistema.
Il vantaggio di questo procedimento è di poter definire una f.d.t. $G_c(s)$ nel dominio *s* e passare nel dominio *z* ottenendo così la $G_c(z)$ del sistema campionato; per passare da un dominio all'altro si sfruttano le equivalenze tra *G(s)* e *G(z)*; alcuni esempi di equivalenze vengono riportate nella tabella 1.

G(s)	*G(z)*
$1/s$	$\frac{T}{z-1}$
$1/s^2$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)}$
e^{-sT}	z^{-1}
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$ $a_1 = -(1 + e^{-aT})$ $a_2 = e^{-aT}$ $b_1 = (aT - 1 + e^{-aT})/a$ $b = (1 - e^{-aT} - -aTe^{-aT})/a$

Tabella 1 Esempi di equivalenze tra *G(s)* e *G(z)*

Esempio 1

Si consideri il sistema continuo che ha come f.d.t.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Supponendo di utilizzare un campionatore ZOH si desidera effettuare la trasformazione nel sistema campionato equivalente e ricavare di seguito la funzione $G_c(z)$ corrispondente.

Soluzione

Moltiplicando la f.d.t. del sistema per la f.d.t. del campionatore si ottiene:

$$G_c(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)}$$

Per ricavare la funzione nel dominio *z* si può utilizzare il metodo della ripartizione in frazioni semplici; tenendo conto che al termine presente al numeratore corrisponde il coefficiente moltiplicatore $1\text{-}z^{-1}$, si ottiene:

$$G_c(z) = (1 - z^{-1})\left[Z\left(\frac{1}{s^2}\right) + Z\left(\frac{1}{s}\right) + Z\left(\frac{1}{s+1}\right)\right]$$

Utilizzando le tabelle si ricava infine:

$$G_c(z) = \frac{(T - 1 + e^{-T})z^{-1} + (1 - e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}$$

Vista la f.d.t. del sistema si può considerare come periodo di campionamento 0,1 s; sostituendo risulta infine:

$$G_c(z) = \frac{0{,}01z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0{,}9z^{-1})}$$

Risposta nel dominio del tempo

Con un procedimento analogo a quello utilizzato per i sistemi continui per determinare la riposta nel dominio del tempo a un determinato ingresso si deve individuare la trasformata Z dell'ingresso e moltiplicarla per *G(z)* per ottenere la trasformata Z dell'uscita; infine si può operare individuando l'antitrasformata dell'uscita per ottenere *y(t)*.

Esempio 2

Si consideri il sistema campionato che ha come f.d.t.

$$G_c(z) = 0{,}05\,\frac{z + 0{,}9}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}9}$$

si desidera ricavare la trasformata Z dell'uscita.

Soluzione

Tenendo conto che la trasformata Z del gradino unitario ha come espressione

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

per la trasformata Z dell'uscita risulta:

$$Y(z) = G_c(z) \cdot X(z) = \frac{0{,}05z\ (z + 0{,}9)}{(z^2 - 1{,}8z + 0{,}9)(z - 1)} = \frac{0{,}05z^2 + 0{,}045z}{z^3 - 2{,}8z^2 + 2{,}7z - 0{,}9}$$

Risposta in frequenza

E' la risposta a regime a segnali sinusoidali che può essere trattata formalmente come quella dei sistemi tempo continuo; si ottiene dalla *G(z)* sostituendo $z=e^{j\omega T}$; dalla funzione $G_c(e^{j\omega T})$ così ottenuta si possono ricavare ampiezza e fase in funzione di ω e di T e tracciare di conseguenza i diagrammi di Bode; nei sistemi campionati il periodo di campionamento influenza la risposta in frequenza; l'approssimazione è tanto migliore quanto più le frequenze sono basse in assoluto o comunque lontane dal limite di campionamento.

Esempio 3

Si consideri il sistema tempo continuo che ha come f.d.t.

$$G(s) = \frac{10}{s + 10}$$

Supponendo di utilizzare un campionatore ZOH si desidera effettuare la trasformazione nel sistema campionato equivalente e ricavare di seguito in modulo e fase la funzione $G_c(e^{j\omega T})$.

Soluzione

Tenendo conto della presenza del campionatore e utilizzando le apposite tabelle si ottiene:

$$G_c(z) = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}}$$

Dopo aver effettuato la sostituzione $z=e^{j\omega T}$ si ha:

$$G_c\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{1 - e^{-10T}}{e^{j\omega T} - e^{-10T}}$$

Applicando le regole dei numeri complessi si ottiene infine:

$$|G_c| = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-10T} - 2e^{-10T}\cos\omega T}}$$

$$\varphi_{G_c} = -\tan^{-1}\frac{\sin\omega T}{\cos\omega T - e^{-10T}}$$

Studio della stabilità

Nota la funzione *G(z)* e quindi la f.d.t. ad anello chiuso è possibile analizzare la stabilità del sistema; il *criterio di stabilità nel domino z* afferma che se tutti i poli della f.d.t. a catena chiusa hanno parte reale compresa tra -1 e +1 allora il sistema è stabile.

Esempio 4

Si consideri il sistema tempo discreto che, con l'impiego di un campionatore ZOH, ha come f.d.t. ad anello chiuso

$$G_c(z) = \frac{0{,}005z + 0{,}0048}{z^2 - 1{,}8z + 0{,}9}$$

Dopo aver individuato i valori dei poi e degli zeri, discuterne la stabilità.

Soluzione

Il sistema ha uno zero e due poli; uguagliando a zero il numeratore si ottiene per lo zero il valore -0,96; uguagliando a zero il denominatore si ottengono per i due poli i valori 0,9+j0,3 e 0,9-j0,3; i valori trovati sono compatibili con la stabilità.

Errore a regime

Un *sistema tempo discreto di tipo zero* non ha poli unitari nella *f.d.t. d'anello* e presenta quindi, a regime, un errore finito nella risposta al gradino; in risposta alla rampa e alla parabola l'errore è infinito.
Un *sistema tempo discreto di tipo uno* ha un polo unitario semplice nella *f.d.t. d'anello* e presenta quindi, a regime, un errore finito nella risposta alla rampa; in risposta al gradino l'errore è nullo, in risposta alla parabola infinito.
Un *sistema tempo discreto di tipo due* ha un polo unitario doppio nella *f.d.t. d'anello* e presenta quindi, a regime, un errore finito nella risposta alla parabola; in risposta al gradino e alla rampa l'errore è nullo.
Si sintetizza quanto affermato nella tabella 2 in cui compaiono le formule di calcolo degli errori di posizione, velocità e accelerazione valutate nel dominio z in risposta ai segnali gradino, rampa e parabola considerati unitari.

	Errore di posizione (risposta al gradino)	Errore di velocità (risposta alla rampa)	Errore di accelerazione (risposta alla parabola)
Sistema tipo zero	$e_p = \dfrac{1}{1 + \lim\limits_{z\to 1} G(z)}$	infinito	infinito
Sistema tipo uno	nullo	$e_v = \dfrac{1}{\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)}$	infinito
Sistema tipo due	nullo	nullo	$e_a = \dfrac{1}{\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2G(z)}$

Tabella 2 Formule per il calcolo delle costanti di posizione, velocità e accelerazione

Regolatori industriali

I regolatori industriali sono facilmente realizzabili per via digitale con il vantaggio di rendere possibile anche la raccolta dati e la trasmissione a distanza dei segnali sotto forma digitale in modo da renderli disponibili in tempo reale ai computer preposti alla supervisione centralizzata e alla generazione dei segnali di riferimento che sono anch'essi in forma digitale per rendere più agevole la trasmissione a distanza.

Le funzioni di trasferimento dei regolatori standard digitali si deducono da quelle dei corrispondenti regolatori analogici operando la sostituzione

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

valida per i diversi tipi di regolatori (P, PI, PD, PID).