Lettura

3 Richard Dedekind
Che cosa sono i numeri?

R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri*, trad. di O. Zariski, Roma, Alberto Stock, 1926, p. 9

Il brano è tratto da una breve memoria di Dedekind (uscita nel 1888) dedicata alla definizione del concetto aritmetico di numero, attraverso l'impiego di concetti logici come quelli di funzione o di insieme qualsiasi. La memoria rappresenta un passaggio importante nel processo di aritmetizzazione dell'analisi, che confluisce nella rivoluzione assiomatica di Hilbert e nel rifiuto di ogni approccio psicologistico (caratteristico, per esempio, di John Stuart Mill) al problema dei fondamenti della matematica. Il brano è interessante anche perché Dedekind, oltre a enunciare la sua teoria e il suo programma di ricerca, ne ricostruisce anche la storia e li contestualizza nel dibattito matematico contemporaneo.

Un problema non risolto: il fondamento della teoria dei numeri

Non si deve nella scienza prestar fede senza dimostrazione a ciò che è dimostrabile. Per quanto questa richiesta apparisca chiara, mi pare che essa non sia soddisfatta, anche se si tien conto dei lavori più recenti, nemmeno nei fondamenti della scienza più semplice e cioè di quella parte logica che tratta della teoria dei numeri.

I numeri sono oggetti mentali puri, non oggetti empirici

Nel concepire l'aritmetica (algebra, analisi) soltanto come una parte della logica io intendo già di considerare il concetto di numero come del tutto indipendente dalle rappresentazioni o idee dello spazio e del tempo e di riconoscere piuttosto in questo concetto una emanazione diretta delle pure leggi del pensiero. Alla domanda espressa dal titolo di questo scritto io rispondo: i numeri sono libere creazioni dello spirito umano, essi servono come mezzo per distinguere più facilmente e più nettamente le cose.

La scienza dei numeri, in quanto parte della logica, è essenzialmente analisi e correlazione

La costruzione puramente logica della scienza dei numeri, e il campo continuo dei numeri in essa acquisito, ci danno i mezzi sufficienti per analizzare con esattezza le nostre rappresentazioni dello spazio e del tempo, avendo la facoltà di riferirle al campo numerico formatosi nel nostro spirito.

Senza la capacità di operare con i numeri non ci sarebbe pensiero

Se si segue attentamente quello che noi facciamo nel computo di un insieme di oggetti, si è condotti a considerare la capacità dello spirito di riferire oggetti a oggetti, di far corrispondere un oggetto ad un altro ovvero di rappresentare un oggetto mediante un altro oggetto, capacità senza la quale è affatto impossibile ogni pensiero. Sopra questo unico fondamento, del resto assolutamente necessario, deve essere costruita, a mio parere, tutta la scienza dei numeri.

La genesi del programma di ricerca di Dedekind

Già prima che fosse pubblicato il mio lavoro sopra la continuità io ebbi l'idea di realizzare una tale costruzione. Ma soltanto dopo la pubblicazione di esso e con molte interruzioni, causate da altri lavori necessari, ho gettato su pochi fogli nel periodo 1872-1878 le basi di un primo schizzo di cui allora parecchi matematici hanno preso visione, discutendone parzialmente con me il contenuto. Questo schizzo portava lo stesso titolo e conteneva, in sostanza, se pur non perfettamente ordinate, tutte le idee fondamentali del presente scritto, il quale non è altro che uno sviluppo accurato di tali idee. I punti fondamentali sono: la netta distinzione del finito dall'infinito, la nozione del numero di oggetti, la dimostrazione della validità logica del metodo d'induzione completa ovvero dell'argomentazione ricorrente da n a $n+1$, e anche la dimostrazione che la definizione induttiva (ovvero per ricorrenza) è completa e scevra da ogni contraddizione. [...]

Il riduzionismo matematico

In conformità allo scopo di questo lavoro, io mi limito a considerare la serie dei così detti numeri naturali. Ho mostrato nel mio scritto precedente sulla continuità (1872), almeno nell'esempio dei numeri irrazionali, in quale modo si debba effettuare l'estensione graduale del concetto di numero, l'introduzione dello zero, dei numeri negativi, fratti, irrazionali e complessi, riferendosi sempre ai concetti già stabiliti, e ciò senza far intervenire nozioni estranee. [...] È appunto questa concezione che ci fa apparire come una cosa evidente che ogni teorema di algebra e di analisi superiore, per quanto remoto, si può enunciare come un teorema sui numeri naturali. [...]

Dedekind e Cantor

Colgo qui l'occasione per fare ancora alcune osservazioni relative al mio scritto sopra accennato sulla continuità e sui numeri irrazionali. La teoria dei numeri irrazionali, ideata da me nell'autunno del 1858 ed esposta in tale scritto, si appoggia su quel fenomeno del campo dei numeri razionali al quale ho dato il nome di «sezione» e che per il primo io ho studiato in modo completo, e conduce alla dimostrazione culminante della continuità del nuovo campo dei numeri reali. Questa teoria mi sembra più semplice, direi anzi più tranquilla, di quelle sviluppate da Weierstrass e da G. Cantor, sebbene anch'esse di rigore perfetto.

GUIDA ALLA LETTURA

1) Che cosa intende Dedekind, dicendo che l'aritmetica è una parte della logica?

2) Qual è il vantaggio di avere una scienza dei numeri costruita in modo puramente logico?

GUIDA ALLA COMPRENSIONE

1) La scienza dei numeri è legata ad alcune fondamentali operazioni del pensiero. Quali?

2) Si tratta secondo Dedekind di operazioni che hanno una base di tipo empiristico (sia essa esperienza interna o esterna)? Motiva la risposta.

3) Dedekind afferma anche che «i numeri sono libere creazioni dello spirito umano». Intende dire con ciò che la scienza dei numeri è arbitraria?

OLTRE IL TESTO

Nel brano, Dedekind affronta il problema della dimostrazione matematica. In sintesi, l'argomento di Dedekind è che le dimostrazioni matematiche sono dimostrazioni logiche e la loro necessità deriva dal fatto che senza matematica sarebbe impossibile pensare.
La peculiarissima esistenza degli oggetti matematici (i numeri) e delle loro leggi è dimostrata dunque dal fatto stesso di pensare. Si tratta di una «dimostrazione di esistenza» con una lunghissima tradizione, anche se non sempre applicata alla matematica. Sai trovarne altri esempi significativi nella storia della filosofia?