APPROFONDIMENTO: MCD, mcm E ALGORITMO DI EUCLIDE

TEORIA

1. Algoritmo di Euclide

Con un **algoritmo** descriviamo l'insieme delle istruzioni da eseguire per passare dai dati di un problema ai risultati.
Euclide, negli *Elementi*, descrive un algoritmo per il calcolo del MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive.
Il metodo si basa sul seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità della differenza
Se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c, allora anche $a - b$ è divisibile per c.

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per **5**.

$130 - 40 = 90$ è divisibile per **5**.

▶ **DIMOSTRAZIONE**

Se a è divisibile per c, allora $a : c = q_1 \rightarrow a = q_1 \cdot c$.

Se b è divisibile per c, allora $b : c = q_2 \rightarrow b = q_2 \cdot c$.

Consideriamo la differenza:

$$a - b = q_1 \cdot c - q_2 \cdot c \underset{\text{raccogliamo } c}{\rightarrow} a - b = (q_1 - q_2) \cdot c \rightarrow a - b \text{ è divisibile per } c.$$

Dati a e b, con $a > b$, per il teorema precedente, quando a e b hanno un divisore comune, anche $a - b$ ha lo stesso divisore, quindi, in particolare, possiamo scrivere:

$$\mathbf{MCD}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \mathbf{MCD}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}; \boldsymbol{b}), \quad \text{con } a > b.$$

Nell'algoritmo utilizziamo anche il fatto che il MCD fra un numero e se stesso è ancora il numero stesso:

$$\text{MCD}(a; a) = a.$$

Esaminiamo ora l'algoritmo.

ALGORITMO

MCD con sottrazioni successive

Consideriamo a e b, con $a > b$;
calcoliamo $a - b$;
se $a - b = b$, allora $a - b$ è il MCD(a; b) e ci fermiamo;
altrimenti sostituiamo il maggiore fra i numeri $a - b$ e b al posto di a e il minore al posto di b, e ripetiamo il procedimento precedente, calcolando la differenza.

ESEMPIO

Calcoliamo MCD(58; 18).

$58 - 18 = \boxed{40}$; — 40 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 40 a 58

$\boxed{40} - 18 = \boxed{22}$; — 22 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 22 a 40

$\boxed{22} - \boxed{18} = \boxed{4}$; — 4 è minore di 18, quindi sostituiamo 4 a 18 e 18 a 22

sono uguali: ci fermiamo

$\boxed{18} - \boxed{4} = 14; \quad 14 - 4 = 10; \quad 10 - 4 = 6; \quad 6 - 4 = 2; \quad 4 - \boxed{2} = \boxed{2}$.

2 è il MCD.

Ecco come abbiamo applicato le proprietà precedenti:

$$\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(\underbrace{40}_{58-18}; 18) = \text{MCD}(\underbrace{22}_{40-18}; 18) = \text{MCD}(18; \underbrace{4}_{22-18}) = \text{MCD}(\underbrace{14}_{18-4}; 4) =$$

$$\text{MCD}(\underbrace{10}_{14-4}; 4) = \text{MCD}(\underbrace{6}_{10-4}; 4) = \text{MCD}(4; \underbrace{2}_{6-4}) = \text{MCD}(\underbrace{2}_{4-2}; 2) = 2$$

Otteniamo il MCD = 2 quando i due numeri sono uguali.

Nell'esempio precedente, da 58 abbiamo tolto 18 per 3 volte fino a giungere a 4:

$$\overbrace{[(58 - \mathbf{18}) - \mathbf{18}] - \mathbf{18}}^{\text{3 sottrazioni}} = 4.$$

Queste 3 sottrazioni ripetute equivalgono a dividere 58 per 18, ottenendo 4 come resto.

$$[(58 - 18) - 18] - 18 = 4$$

$$58 : 18 = \mathbf{3} \quad \text{resto } 4$$

Quindi, utilizzando il teorema della divisibilità della differenza, ma evitando sottrazioni ripetute, diciamo che se 58 e 18 sono divisibili per uno stesso numero, anche 4, resto di 58 : 18, è divisibile per lo stesso numero.
L'esempio giustifica il seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità del resto

Se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c, allora anche r, resto della divisione $a : b$, è divisibile per c.

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per **5**.

130 : 40 = 3 con resto 10

↓

10 è divisibile per **5**

TEORIA

Nell'algoritmo di Euclide, per diminuire il numero di operazioni da eseguire, possiamo allora procedere mediante **divisioni successive**, invece che sottrazioni, e utilizzare i resti ottenuti.

ESEMPIO

Calcoliamo MCD(58; 18) con divisioni ripetute.

$58 : 18 = 3$ con resto 4 → $\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(18; 4)$;

$18 : 4 = 4$ con resto 2 → $\text{MCD}(18; 4) = \text{MCD}(4; 2)$;

$4 : 2 = 2$ con resto 0 → $\text{MCD}(4; 2) = 2$.

Abbiamo ottenuto di nuovo $\text{MCD}(58; 18) = 2$.

Nell'esempio ci siamo fermati quando abbiamo ottenuto resto 0, perché in questo caso il secondo numero è divisore del primo e quindi è anche il MCD. In generale:

$\text{MCD}(a; b) = b$, se $r = 0$.

2. Una proprietà che lega mcm e MCD di due numeri

Il minimo comune multiplo e il massimo comune divisore di due numeri sono legati anche dalla seguente proprietà:

$$\textbf{mcm}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\textbf{MCD}(a; b)}.$$

- Consideriamo $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.
  Il MCD, scomposto in fattori, è $3 \cdot 7$, e il mcm è $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
  Esprimiamo il prodotto dei due numeri, lasciandoli scomposti in fattori:

  $$84 \cdot 105 = (2^2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}) \cdot (\mathbf{3} \cdot 5 \cdot \mathbf{7}).$$

  Vediamo che $3 \cdot 7$, cioè il MCD, è ripetuto due volte, mentre nel mcm dobbiamo considerarlo una volta sola. Quindi:

  $$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{(2^2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}) \cdot (\mathbf{3} \cdot 5 \cdot \mathbf{7})}{\mathbf{3} \cdot \mathbf{7}} \quad \to \quad \text{mcm}(84; 105) = \frac{84 \cdot 105}{\text{MCD}(84; 105)}.$$

La proprietà permette di calcolare il mcm se si è calcolato il MCD, per esempio con l'algoritmo di Euclide.

- Con l'algoritmo di Euclide abbiamo calcolato che $\text{MCD}(58; 18) = 2$, quindi:

  $$\text{mcm}(58; 18) = \frac{58 \cdot 18}{2} = 522.$$

ESERCIZI

Determina il MCD dei seguenti gruppi di numeri utilizzando gli algoritmi di Euclide delle sottrazioni successive e delle divisioni successive. Determina poi il mcm utilizzando la formula che lo lega al MCD.

1 4, 16; 15, 20; 22, 7.

2 20, 40; 32, 44; 35, 72.

3 56, 70; 72, 99; 45, 300.

4 10, 1000; 60, 1500; 5, 1080.