APPROFONDIMENTO DI LOGICA

TEORIA

1. Implicazione e coimplicazione

Implicazione materiale

DEFINIZIONE

Dati gli enunciati A e B, l'**implicazione materiale** $A \rightarrow B$, che leggiamo «A implica B», oppure «Se A, allora B», è l'enunciato che è falso se A è vero e B è falso, altrimenti è vero.

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nella logica formale l'implicazione «se A, allora B», non sottolinea un nesso di causa-effetto tra A e B, ma un collegamento dato dalla tavola di verità.

Quindi possiamo anche scrivere implicazioni che non hanno senso comune e i cui valori di verità non hanno senso comune. Per esempio, se A: «Non ho più di due mani» e B: «I gatti non hanno due code», possiamo scrivere che «Se non ho più di due mani allora i gatti non hanno due code» è una proposizione logica *vera* anche se non ha senso.

Quindi, dell'implicazione materiale «se A, allora B», possiamo dire che:

- se $A \rightarrow B$ è vera, allora dalla verità di A possiamo dedurre la verità di B;
- $A \rightarrow B$ è sempre vera quando A è falsa, indipendentemente dal valore di verità di B, perché da una premessa falsa si può dedurre qualunque conclusione.

Queste proprietà sono più facilmente comprensibili quando si usano implicazioni che hanno un senso comune, che derivano dal linguaggio naturale o da quello matematico.

Consideriamo per esempio le proposizioni A: «Ho la febbre alta» e B: «Sono malato». Se A e B sono entrambe vere, l'enunciato $A \rightarrow B$ diventa «Se ho la febbre alta, allora sono malato» che in questo caso ha un senso comune di verità.

In particolare esiste un rapporto di causa-effetto tra A e B che ci permette di dire che da una premessa vera deduciamo una conseguenza vera (prima riga della tavola di verità).

Ma l'enunciato $A \rightarrow B$ risulta sempre vero anche quando l'enunciato A è falso (terza e quarta riga della tabella di verità). Infatti, «Non ho la febbre alta» può significare sia che io sia malato (con febbre non alta) sia che io non sia malato, quindi le proposizioni «Non ho la febbre alta, quindi sono malato» e «Non ho la febbre alta, quindi non sono malato» sono entrambe vere.

Coimplicazione materiale

DEFINIZIONE

Dati gli enunciati A e B, la **coimplicazione materiale** $A \leftrightarrow B$, che leggiamo «A coimplica B», oppure «A se e solo se B», è l'enunciato che è vero se A e B sono entrambi veri o entrambi falsi, altrimenti è falso.

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Anche la coimplicazione materiale, come l'implicazione materiale, non è un discorso logico ma un collegamento dato dalla tavola di verità. È quindi possibile scrivere coimplicazioni che non hanno senso comune.

- Consideriamo A: «Ti faccio un regalo» e B: «Sei promosso»
  L'enunciato $A \leftrightarrow B$ è: «Ti faccio un regalo se e solo se sei promosso». Si tratta di una coimplicazione che ha senso comune.
  Questo enunciato è vero se sei promosso e ti faccio un regalo oppure se non sei promosso e non ti faccio un regalo.

2. Espressioni logiche e schemi di ragionamento

ESPRESSIONI LOGICHE

Come con le operazioni tra numeri scriviamo espressioni numeriche, così nella logica scriviamo **espressioni logiche**, utilizzando i connettivi.

Nelle espressioni logiche l'operatore che ha la precedenza su tutti gli altri è quello della negazione, seguono poi quelli di congiunzione e disgiunzione, e infine quelli di implicazione materiale e coimplicazione materiale. Quindi, l'ordine di precedenza degli operatori logici è:

$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \dot{\vee},\ \rightarrow,\ \leftrightarrow.$

Inoltre, come nel caso delle espressioni numeriche, utilizziamo le parentesi per cambiare l'ordine con cui si eseguono le operazioni e usiamo le lettere, dette **variabili logiche**, per indicare enunciati generici.

Di un'espressione logica possiamo compilare la tavola di verità, a partire dai valori di verità delle variabili presenti.

ESEMPIO

▸ **Scriviamo la tavola di verità dell'espressione $\overline{A} \vee B$.**
Dopo aver scritto tutte le possibili coppie di valori di verità per A e B, scriviamo la colonna di $\overline{A}$, ottenendola da A con la negazione. Poi guardiamo le colonne di $\overline{A}$ e B e scriviamo quella di $\overline{A} \vee B$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Due espressioni logiche con le stesse variabili sono **equivalenti** se hanno la stessa tavola di verità.

Per indicare l'equivalenza, usiamo il simbolo $=$ e per verificarla utilizziamo una tavola di verità.

ESEMPIO

▶ **Verifichiamo con una tavola di verità che $A \wedge B \vee B = (A \vee B) \wedge B$.**
Per ottenere $(A \wedge B) \vee B$, calcoliamo prima la colonna di $A \wedge B$ e usiamola poi con B.
Per calcolare $(A \vee B) \wedge B$, abbiamo bisogno della colonna di $A \vee B$. Quindi dobbiamo compilare la tavola di verità seguente.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \wedge B \vee B$	$(A \vee B) \wedge B$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

Le colonne di $(A \wedge B) \vee B$ e $(A \vee B) \wedge B$ sono uguali, quindi le espressioni sono equivalenti.

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI LOGICHE

Mediante l'equivalenza di espressioni possiamo scrivere proprietà di cui godono le operazioni logiche.

Proprietà commutativa della congiunzione:
$A \wedge B = B \wedge A$.

Proprietà associativa della congiunzione:
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

Proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione:
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Idempotenza della congiunzione:
$A \wedge A = A$.

Proprietà commutativa della disgiunzione:
$A \vee B = B \vee A$.

Proprietà associativa della disgiunzione:
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

Proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Idempotenza della disgiunzione:
$A \vee A = A$.

Doppia negazione: $\overline{\overline{A}} = A$.

Leggi di De Morgan: **1.** $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; **2.** $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

ESEMPIO

▶ **Applichiamo la prima legge di De Morgan agli enunciati:**
A: «Roberta dipinge», **B: «Roberta canta».**

L'enunciato: «Non è vero che Roberta dipinge e canta.» $\overline{A \wedge B}$

equivale a: «$\underbrace{\text{Roberta non dipinge}}_{\overline{A}}$ $\underbrace{\text{oppure}}_{\vee}$ $\underbrace{\text{non canta}}_{\overline{B}}$.»

Essendo un'equivalenza fra espressioni logiche, ognuna delle proprietà che abbiamo elencato può essere verificata con una tavola di verità.

ESEMPIO

▶ **Verifichiamo la prima legge di De Morgan.**

Compiliamo la tavola e notiamo che le colonne di $\overline{A \wedge B}$ e $\overline{A} \vee \overline{B}$ sono uguali, quindi $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Una **tautologia** è un'espressione logica vera per qualsiasi valore di verità attribuito alle sue variabili.
Una **contraddizione** è un'espressione logica falsa per qualsiasi valore di verità attribuito alle sue variabili.

ESEMPIO

$A \vee \overline{A}$ è una tautologia. Infatti:

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
V	F	V
F	V	V

sempre vera

$A \wedge \overline{A}$ è una contraddizione. Infatti:

A	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{A}$
V	F	F
F	V	F

sempre falsa

La negazione di una tautologia è una contraddizione e viceversa.

SCHEMI DI RAGIONAMENTO

Nella vita reale e nella matematica siamo interessati alle deduzioni logiche cioè a quei ragionamenti che, basandosi sulle relazioni di causa-effetto, partono da premesse vere e giungono a conclusioni vere. Gli schemi di ragionamento non vanno confusi con l'implicazione materiale e la coimplicazione materiale.

Premesse e conclusione

Esaminiamo il seguente ragionamento.

- Se ho fame, allora mangio.
  Ho fame, — premesse
  quindi
  mangio. — conclusione

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

con:
A: «ho fame»
B: «mangio»

Nella prima colonna abbiamo scritto il ragionamento; nella seconda abbiamo tradotto in simboli lo **schema di ragionamento**, che è indipendente dai particolari enunciati assegnati alle variabili.
Il ragionamento dell'esempio è costituito da due **premesse**, $A \rightarrow B$ e A, e da una **conclusione**.

Modus ponens

Lo schema di ragionamento dell'esempio che abbiamo esaminato si chiama **modus ponens**. Possiamo scriverlo con l'espressione:

$[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$ — si legge: *A* implica *B* e *A* implica *B*

modus ponens

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Modus tollens

Esaminiamo ora il seguente ragionamento.

- Se guido, allora ho la patente.
  Non ho la patente, — premesse
  quindi
  non guido. — conclusione

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}$$

con:

A: «guido»,

B: «ho la patente»

Lo schema di ragionamento di questo esempio è detto **modus tollens** e può essere scritto mediante l'espressione logica:

$$[(A \rightarrow B) \wedge \overline{B}] \rightarrow \overline{A}.$$

Uno schema di ragionamento è **valido** se e solo se la sua espressione logica è una tautologia.

modus tollens

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}$$

TEORIA

ESERCIZI

1. Implicazione e coimplicazione

1 TRADUCI DALLE PAROLE AI SIMBOLI Scrivi in simboli le seguenti proposizioni. «Il numero 18 è divisibile per 6 se e solo se 18 è divisibile per 3 e per 2.» e «Un rombo è un quadrato se ha tutti gli angoli congruenti.».

TRADUCI DAI SIMBOLI ALLE PAROLE **Considera le proposizioni A: «$3 > 9$», B: «3 è un numero primo.» e C: «$9 = 3^2$». Traduci in parole le seguenti proposizioni e attribuisci a ciascuna di esse il valore di verità.**

2 $A \rightarrow B$ **3** $B \rightarrow A$ **4** $A \leftrightarrow B$ **5** $C \leftrightarrow B$ **6** $C \rightarrow B$

7 TRADUCI DALLE PAROLE AI SIMBOLI Le seguenti proposizioni sono proposizioni composte, costituite da enunciati distinti (componenti) legati da connettivi logici. Riscrivile in simboli, indicando con una lettera maiuscola ogni componente.

a. «Se 17 è un numero è primo, allora 17 ha esattamente due divisori.»

b. «Se MCD(12; 28) = 4, i due numeri 12 e 28 sono pari.»

c. «Un rombo è un quadrato se e solo se ha tutti gli angoli retti.»

d. «Se il numero 264 è multiplo di 88, allora 264 è pari.»

e. «Il reciproco del numero 8 esiste se e solo se il numero 8 è diverso da 0.»

f. «Vado a scuola in bicicletta se e solo se il cielo è sereno.»

g. «Se $3 < 5$, allora $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.»

2. Espressioni logiche e schemi di ragionamento

ESPRESSIONI LOGICHE

TRADUCI **in parole le espressioni che seguono, considerando gli enunciati A, B e C.**

8 A: «Vado in vacanza in montagna.», B: «Leggo molti libri.», C: «Vado in vacanza al mare.».
$\overline{A} \wedge B$; $A \wedge \overline{B}$; $\overline{A \wedge B}$; $\overline{A} \wedge \overline{B}$; $C \wedge \overline{B}$; $\overline{C} \wedge B$; $A \wedge \overline{C}$; $\overline{A \vee C}$.

9 A: «Il numero 56 è pari.», B: «Il numero 56 è divisibile per 7.», C: «Il numero 56 è il risultato di $7 \cdot 8$.».
$A \wedge B \wedge C$; $B \wedge \overline{C}$; $\overline{A} \wedge B \vee C$; $\overline{\overline{A} \wedge C}$; $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$.

10 A: «Compro il giornale.», B: «Compro il pane.», C: «Compro un paio di scarpe.».
$\overline{A \vee C}$; $A \dot{\vee} \overline{B}$; $\overline{\overline{C} \vee B}$; $\overline{A} \dot{\vee} \overline{B}$; $(\overline{A} \dot{\vee} \overline{C}) \wedge B$.

11 A: «Telefono a Marco.», B: «Non vado al corso di musica.», C: «Studio storia.».
$A \wedge B$; $\overline{B} \wedge \overline{C}$; $\overline{A} \wedge C$; $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$; $C \wedge \overline{B}$; $\overline{A \wedge B}$; $A \wedge \overline{B}$; $\overline{A} \wedge B \wedge C$.

TRADUCI **DAI SIMBOLI ALLE PAROLE** **le proposizioni composte indicate e attribuisci a ciascuna di esse il valore di verità.**

12 A: «Il quadrato ha tre angoli.»; B: «L'esagono regolare ha tutti i lati uguali.»; C: «Il quadrato non è un rettangolo.».

$(\overline{A} \vee B) \wedge \overline{B}$; $B \dot{\vee} \overline{C}$; $B \vee \overline{C}$; $\overline{A} \dot{\vee} (B \wedge \overline{B})$; $C \wedge (B \vee \overline{B})$; $A \vee B \dot{\vee} \overline{C}$; $\overline{C} \leftrightarrow A \vee B$.

13 A: «$9^2 = 18$»; B: «$12 = 6 \cdot 2$»; C: «$4 + 2 \neq 6$».

$A \wedge B \dot{\vee} C$; $\overline{B} \wedge C$; $A \wedge \overline{\overline{B}}$; $\overline{A} \leftrightarrow \overline{C}$; $(A \vee B) \leftrightarrow \overline{C}$; $B \rightarrow (A \wedge C)$.

14 A: «5 è maggiore di 6.», B: «$\frac{1}{3}$ è un numero intero.»; C: «12 è un numero pari.».

$\overline{A \wedge B}$; $\overline{B} \wedge C$; $\overline{A} \vee B$; $\overline{A} \dot{\vee} \overline{C}$; $A \wedge \overline{B}$; $\overline{C \vee A}$; $\overline{A} \dot{\vee} C$; $\overline{A} \wedge \overline{B}$; $\overline{B} \vee \overline{C}$; $B \wedge \overline{C}$.

15 A: «$5 < 7$», B: «Febbraio è il primo mese dell'anno.», C: «Febbraio è il mese con più giorni.»; D: «7 è un numero primo.».

$A \wedge \overline{\overline{C}}$; $\overline{B \vee \overline{D}}$; $\overline{C} \wedge D$; $\overline{D} \dot{\vee} \overline{B}$; $\overline{A} \vee B$; $A \wedge \overline{D}$; $\overline{C \dot{\vee} B}$; $\overline{B} \wedge \overline{C}$.

16 A: «La somma di 2 e 3 è 5.», B: «Il prodotto di 2 e 3 è 8.»; C: «2 è maggiore di 3.».

$\overline{A} \dot{\vee} C$; $B \vee C$; $A \dot{\vee} \overline{B}$; $A \wedge B$; $\overline{A} \vee \overline{B}$; $\overline{A} \vee C$; $\overline{B} \dot{\vee} \overline{C}$; $\overline{A} \wedge C$; $B \wedge C$; $B \wedge \overline{C}$.

17 A: «18 è un multiplo di 6.», B: «6 non è un divisore di 24.»; C: «9 è un numero primo.».

$\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$; $\overline{A} \wedge B$; $(A \wedge B) \wedge \overline{C}$; $A \wedge C$; $\overline{B} \wedge C$; $(\overline{A} \wedge \overline{C}) \wedge B$.

18 A: «$\frac{1}{4}$ è un quadrato perfetto.», B: «21 è un numero primo.», C: «7 è un divisore di 28.».

$A \dot{\vee} \overline{B}$; $\overline{B \wedge C}$; $\overline{A} \dot{\vee} C$; $\overline{A \wedge C}$; $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

19 A: «12 111 è un multiplo di 11.», B: «66 è un multiplo di 6.», C: «12 111 e 66 sono primi tra loro.».

$\overline{A} \dot{\vee} \overline{B}$; $\overline{B} \vee \overline{C}$; $A \wedge \overline{C}$; $A \wedge \overline{B} \vee C$; $\overline{A} \dot{\vee} B \dot{\vee} \overline{C}$; $A \vee \overline{B} \wedge C$.

20 A: «I giorni dell'anno sono 300.», B: «I mesi dell'anno sono 13.», C: «I giorni della settimana sono 7.».

$A \vee B \vee C$; $A \vee C \vee \overline{B}$; $\overline{A \vee B} \wedge C$; $\overline{A} \wedge B \vee C$; $A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$; $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$; $\overline{A} \vee \overline{B \wedge C}$.

21 Attribuisci il valore di verità agli enunciati A: «5 è un numero pari.», B: «$\frac{5}{2}$ è un numero razionale.», C: «$15 = 1^5$» e poi stabilisci il valore di verità delle seguenti espressioni.

a. $\overline{A} \dot{\vee} \overline{B}$; $\overline{A} \dot{\vee} (B \wedge \overline{C})$; $A \vee (B \dot{\vee} \overline{C})$.

b. $A \dot{\vee} (\overline{B} \vee \overline{C})$; $\overline{A} \vee (B \dot{\vee} C)$; $(A \dot{\vee} B) \vee \overline{C}$; $(A \dot{\vee} \overline{B}) \wedge C$.

22 Dati gli enunciati A: «$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$», B: «$5^0 = 1$» e C: «$2^6 = 8^3$», traduci in parole i seguenti enunciati e attribuisci a ciascuno di essi il valore di verità.

$A \leftrightarrow B$; $A \leftrightarrow C$; $B \leftrightarrow A \vee C$; $\overline{B} \vee A \leftrightarrow A \wedge \overline{C}$; $C \rightarrow [(\overline{A} \vee B) \leftrightarrow C]$.

23 Attribuisci il valore di verità ad A, B e C, quindi determina il valore di verità delle espressioni indicate.

A: «12 ha sei divisori.»; B: «14 e 27 sono primi tra loro.»; C: «Il triangolo ha 4 angoli.».

a. $A \wedge C \rightarrow B$; **b.** $(A \vee C) \wedge \overline{B}$; **c.** $A \rightarrow \overline{B} \wedge \overline{C}$.

24 Attribuisci il valore di verità ad A, B, C, quindi determina il valore di verità delle espressioni indicate.
A: «7 è un divisore di 2870.»; B: «9185 è un multiplo di 11.»; C: «6303 è divisibile per 6.».

a. $A \wedge B$; $A \vee B$; $A \wedge C$; $A \wedge \overline{C}$; $\overline{B} \wedge \overline{C}$; $A \rightarrow B$; $B \leftrightarrow A$.

b. $(A \dot{\vee} B) \wedge \overline{C}$; $A \vee [(A \dot{\vee} B) \wedge C] \vee (B \leftrightarrow A) \wedge \overline{A \rightarrow B}$.

ESERCIZI

TRADUCI **DAI SIMBOLI ALLE PAROLE** **Dati gli enunciati *A*: «Oggi fa caldo.», *B*: «Oggi piove.», *C*: «Esco con l'ombrello.» e *D*: «Vado a scuola in bicicletta.», traduci in parole le seguenti espressioni.**

25 $A \to \overline{B}$; $\overline{C} \to B$; $\overline{D \to A}$; $\overline{C} \to \overline{A}$.

26 $\overline{A} \leftrightarrow D$; $\overline{B} \to \overline{D}$; $\overline{A} \wedge D \leftrightarrow \overline{C}$; $D \to \overline{B \vee A}$.

COME SI FA

► **Scriviamo in simboli l'espressione «Se 187 = 11 · 17, 187 non è un numero primo ed è multiplo di 11.».**

Indichiamo con una variabile logica ogni enunciato componente.

A: «187 = 11 · 17» *B*: «187 è un numero primo.» *C*: «187 è multiplo di 11.»

«Se 187 = 11 · 17 (allora) 187 non è un numero primo ed è multiplo di 11.»

implicazione materiale negazione congiunzione

In simboli: $A \to (\overline{B} \wedge C)$.

TRADUCI **DALLE PAROLE AI SIMBOLI** **Riscrivi in simboli le seguenti espressioni, indicando con una variabile logica ogni enunciato componente.**

27
- **a.** «Luisa va al mare ma non fa il bagno.»
- **b.** «Oggi vedo Stefano e lo invito a cena.»
- **c.** «Maria non legge giornali e non guarda la televisione.»
- **d.** «Il numero $\frac{7}{5}$ non è razionale, è positivo e maggiore di 1.»
- **e.** «Luca deve risolvere un problema, portare fuori il cane, telefonare a Rita e a Paolo.»

28
- **a.** «Il cubo è un solido, ha otto facce e le sue facce sono quadrati.»
- **b.** «Il numero 6 non è divisibile per 4 ed è pari.»
- **c.** «Non è vero che o porti la pizza o non partecipi alla festa.»
- **d.** «18 è multiplo di 9, divisore di 36 ma non è divisibile per 5.»

29
- **a.** «Se non pianto la tenda e piove, il sacco a pelo si bagna.»
- **b.** «Se *r* è parallela a *s* e *s* è parallela a *t*, allora *r* è parallela a *t*.»
- **c.** «Se vai in palestra, non ci vediamo e non fai i compiti.»
- **d.** «Il libro è tuo se e solo se l'arancione non è il tuo colore preferito.»

30 **YOU & MATHS** Write the sentences below in terms of the following:
r: strawberries are ripe along the path; *b*: snails have been seen in the area; *w*: walking on the path is safe.
- **a.** Strawberries are ripe along the path and snails have not been seen in the area.
- **b.** Snails have not been seen in the area, and walking on the path is safe, and strawberries are ripe along the path.
- **c.** If strawberries are ripe along the path, then walking is safe if and only if snails have not been seen in the area.
- **d.** It is not safe to walk along the path, snails have not been seen in the area, and the strawberries along the path are ripe.

31 **INTORNO A NOI** Negli ascensori di solito è presente un'etichetta con una frase simile a quella indicata a lato. Individua tre proposizioni *P*, *Q*, *R* in modo da poter scrivere l'avviso come espressione in cui *P*, *Q* e *R* sono legate con connettivi logici. Qual è l'espressione in simboli?

NON POSSONO USARE L'ASCENSORE PERSONE MINORI DI 12 ANNI SE NON ACCOMPAGNATE.

32 TRADUCI Considera le seguenti proposizioni: A: «Sabato telefono a Ugo.»; B: «Sabato Ugo mi telefona.»; C: «Sabato finisco il lavoro.»; D: «Sabato guardo la TV.».

a. Traduci in parole le proposizioni:

$$A \vee D; \quad B \wedge C; \quad B \vee \overline{B}; \quad \overline{A \wedge C}; \quad D \to \overline{C}; \quad B \leftrightarrow C; \quad \overline{A} \vee B; \quad (\overline{D} \to C) \wedge A; \quad (A \wedge \overline{B}) \wedge (C \wedge D).$$

b. Traduci le seguenti proposizioni composte in simboli.
«Sabato, se Ugo mi telefona finisco il lavoro e non guardo la TV.»
«Sabato finisco il lavoro o guardo la TV e non telefono a Ugo.»
«Sabato, se Ugo non mi telefona io telefono a Ugo e finisco il lavoro.»
«Sabato, o telefono a Ugo o mi telefona lui e finisco il lavoro.»

33 INTORNO A NOI Sono date le proposizioni:

A: «Il mio cane abbaia.»;
B: «La luna è piena.»;
C: «Piove.»;
D: «Il mio cane ulula.».

Utilizza le variabili logiche e i connettivi adeguati per rappresentare schematicamente le seguenti proposizioni:

a. «Se la luna è piena, il mio cane o abbaia o ulula.»;

b. «Che piova o che la luna sia piena, il mio cane abbaia.»;

c. «Se il mio cane ulula allora la luna è piena e se piove allora il mio cane abbaia.».

Espressioni e valori di verità

COME SI FA

Consideriamo le proposizioni A: «63 è un multiplo di 7.», B: «3 è un divisore di 63.» e C: «63 è un numero pari.».

► **Stabiliamo il valore di verità di:** $\overline{A \wedge B}$, $\overline{B} \vee \overline{C}$, $\overline{B} \vee C \to A$.

Costruiamo la tavola di verità.

A	B	C	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \vee \overline{C}$	$\overline{B} \vee C$	$\overline{B} \vee C \to A$
V	V	F	V	F	F	V	V	F	V

$63 = 7 \cdot 9$ $\quad 63 : 3 = 21$ $\quad$ 63 non è un numero pari

Espressioni e tavole di verità

34 CACCIA ALL'ERRORE Esamina la seguente tavola di verità e scopri in essa almeno cinque errori.

A	B	C	$A \to B$	$C \vee A$	$C \vee B$	$C \vee A \to C \vee B$	$(A \to B) \to [C \vee A \to C \vee B]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V

35 **COMPLETA** la seguente tavola di verità inserendo l'espressione corretta scelta fra:
$(A \to \overline{B}) \vee C$, $\quad (A \to \overline{B}) \wedge C$, $\quad (A \to \overline{B}) \dot{\vee} C$, $A \vee \overline{B} \to C$.

A	*B*	*C*	
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

36 **COMPLETA** la seguente tavola inserendo i valori di verità e gli operatori mancanti.

A	*B*	$A \wedge B$	*A* ☐ *B*	$A \vee B$	*A* ☐ *B*
V		V	F		V
	F		F	F	V
F		F	V		V
	F		V	V	F

COME SI FA

▶ **Date due proposizioni generiche *A* e *B*, costruiamo la tavola di verità dell'espressione $\overline{A} \vee (B \wedge A)$.**

A	*B*	$\overline{A}$	$B \wedge A$	$\overline{A} \vee (B \wedge A)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

tutti i possibili casi per *A* e *B*

aggiungiamo le colonne $\overline{A}$ e $B \wedge A$

Per ciascuna delle seguenti espressioni, costruisci la tavola di verità considerando *A* e *B* proposizioni generiche.

37 $\overline{A} \wedge B$; $\quad A \wedge \overline{B}$; $\quad \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\quad \overline{A} \dot{\vee} B$; $\quad A \dot{\vee} \overline{B}$.

38 $\overline{A} \vee B$; $\quad A \vee \overline{B}$; $\quad \overline{A} \vee \overline{B}$; $\quad \overline{A} \dot{\vee} \overline{B}$; $\quad \overline{\overline{A}} \dot{\vee} B$.

39 $\overline{A} \to B$; $\quad A \to \overline{B}$; $\quad \overline{A} \to \overline{B}$; $\quad \overline{\overline{A}} \to B$.

40 $\overline{A} \leftrightarrow B$; $\quad A \leftrightarrow \overline{B}$; $\quad \overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$; $\quad \overline{\overline{A}} \leftrightarrow B$.

41 $\overline{\overline{A \wedge B}}$; $\quad A \wedge \overline{A} \wedge B$; $\quad A \wedge (\overline{A} \wedge B)$; $\quad (A \wedge \overline{B}) \wedge B$.

42 $\overline{\overline{A \vee B}}$; $\quad \overline{A} \vee A \vee B$; $\quad \overline{A} \vee (A \vee B)$; $\quad (A \vee \overline{B}) \vee B$.

43 $\overline{A} \wedge A \vee B$; $\quad \overline{A} \wedge A \vee B$; $\quad (A \vee \overline{B}) \wedge B$; $\quad A \vee (\overline{B} \wedge B)$.

Per ciascuna delle seguenti espressioni, costruisci la tavola di verità considerando *A* e *B* e *C* proposizioni generiche.

44 $(A \vee B) \wedge C$; $\overline{A} \wedge (B \vee C)$; $(A \to B) \vee (C \to A)$.

45 $B \vee (A \wedge C)$; $\overline{A} \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})$; $(A \leftrightarrow C) \wedge (C \leftrightarrow B)$.

46 $A \wedge (\overline{B \vee C})$; $(\overline{B} \to C) \vee A$; $\overline{A \to B} \vee C$.

47 $B \wedge (\overline{C} \wedge A)$; $(A \vee C) \wedge (B \wedge C)$; $(A \leftrightarrow B) \wedge C$.

48 **VERO O FALSO?** Considera A e B proposizioni generiche.

a. Se $\overline{\overline{A}}$ è falsa, allora anche A è falsa. V F

b. Se $A \wedge B$ è falsa, allora o A o B è falsa. V F

c. $A \dot{\vee} B$ è vera se e solo se A e B non sono entrambe vere o entrambe false. V F

d. Se A e B sono false, allora $(A \vee B) \wedge (A \dot{\vee} B)$ è falsa. V F

49 **VERO O FALSO?**

a. Se $A \leftrightarrow B$ è falsa, allora A e B non sono entrambe vere o entrambe false. V F

b. $A \to B$ è falsa se e solo se A è vera. V F

c. $A \to B$ non può essere falsa se A è falsa. V F

d. $A \leftrightarrow B$ è vera se e solo se anche A e B lo sono. V F

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI LOGICHE

Enuncia le seguenti proprietà delle operazioni logiche e verificale utilizzando una tavola di verità.

50 Negazione della negazione.

51 Idempotenza della disgiunzione.

52 Commutativa della disgiunzione.

53 Associativa della congiunzione.

54 Distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione.

55 Distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione.

56 **FAI UN ESEMPIO** di applicazione della seconda legge di De Morgan e verifica poi la legge mediante la tavola di verità.

Equivalenze

57 **TEST** Dato l'enunciato «Non è vero che -2 non è un numero pari.», quale dei seguenti è equivalente?

A «-2 non è un numero pari.»

B «Non è vero che -2 è un numero pari.»

C «-2 è un numero pari.»

D «-2 non è un numero non pari.»

COME SI FA

▶ **Verifichiamo che $B \vee (\overline{B \vee \overline{A}}) = \overline{B} \wedge A \vee B$.**

Possiamo procedere in due modi.

- Compiliamo la tavola di verità.

A	B	$\overline{A}$	$B \vee \overline{A}$	$\overline{B \vee \overline{A}}$	$B \vee (\overline{B \vee \overline{A}})$	$\overline{B}$	$\overline{B} \wedge A$	$\overline{B} \wedge A \vee B$
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	F

colonne uguali

Le colonne relative alle due espressioni sono uguali, quindi le espressioni sono equivalenti.

- Utilizziamo le proprietà delle operazioni logiche per passare da un'espressione all'altra attraverso espressioni equivalenti.

negazione della negazione

$$B \lor (\overline{B \lor \overline{A}}) \underset{\text{2ª legge di De Morgan}}{=} B \lor (\overline{B} \land \overline{\overline{A}}) \overset{\text{negazione della negazione}}{=} B \lor (\overline{B} \land A) \underset{\text{commutativa della disgiunzione}}{=} \overline{B} \land A \lor B.$$

2ª legge di De Morgan   commutativa della disgiunzione

Verifica le seguenti equivalenze utilizzando il metodo che preferisci.

58 $(A \lor B) \land A = A \lor (A \land B)$

59 $\overline{\overline{B}} \land (B \lor A) = B \lor (B \land A)$

60 $\overline{\overline{A} \land B} \lor \overline{B} = A \lor \overline{B}$

61 $\overline{A \lor (\overline{\overline{B}} \land B)} = \overline{A} \land \overline{B}$

62 $\overline{A \lor (B \land A)} = \overline{A} \lor (\overline{A} \land \overline{B})$

63 $\overline{(A \lor \overline{B}) \land (\overline{A} \lor B)} = (\overline{B} \land A) \lor (\overline{A} \land B)$

Utilizzando le tavole di verità, verifica le seguenti equivalenze.

64 $\overline{\overline{B} \land A} = A \to B$

65 $B \land \overline{A} \lor A \land \overline{B} = A \dot{\lor} B$

66 $A \to (B \to C) = (A \land B) \to C$

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

67 AL VOLO Stabilisci se le seguenti espressioni sono tautologie o contraddizioni.

a. $B \lor (\overline{B} \land \overline{B})$; **b.** $(A \lor A) \land (\overline{A} \land \overline{A})$; **c.** $\overline{\overline{\overline{C}}} \leftrightarrow \overline{C}$; **d.** $\overline{A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}}$.

Utilizzando le tavole di verità, stabilisci quali, fra le seguenti, sono tautologie e quali contraddizioni.

68 $B \land (\overline{B \lor \overline{A}})$; $A \land \overline{A} \to B$; $(A \dot{\lor} B) \to A \lor B$.

69 $(\overline{B} \to B) \to B$; $[(A \to B) \to A] \to A$; $(\overline{B} \land C) \land (C \land B)$.

70 Fra le seguenti espressioni, indica quali sono tautologie, quali contraddizioni e quali non sono né tautologie né contraddizioni: $A \to A$; $A \lor B \to A$; $A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$; $\overline{B} \leftrightarrow B$; $A \land B \to B$.

71 Senza utilizzare le tavole di verità, individua fra le seguenti proposizioni una tautologia e una contraddizione; spiega il tuo ragionamento. Verifica poi le tue risposte compilando le tavole di verità.

$(\overline{A} \lor B) \land (A \lor \overline{B})$; $B \lor \overline{B} \to A \land \overline{A}$; $A \lor \overline{B} \to B \land \overline{A}$; $A \lor \overline{A} \leftrightarrow \overline{B \land \overline{B}}$.

SCHEMI DI RAGIONAMENTO

72 TEST Quale, fra i seguenti, *non* è un ragionamento valido? «Se non accordo la chitarra, non suono.»

A Suono, quindi accordo la chitarra.
B Se suono, allora accordo la chitarra.
C Accordo la chitarra, quindi suono.
D Non accordo la chitarra, quindi non suono.

73 SPIEGALO TU Perché i seguenti ragionamenti non sono validi?

a. «Se un cane abbaia, allora non morde. Quel cane non abbaia, allora morde.»
b. «Se l'acqua non bolle, la pasta non cuoce. L'acqua bolle, allora la pasta cuoce.»

74 Verifica che la legge di contrapposizione $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ è uno schema di ragionamento valido.

75 Il seguente ragionamento è valido: mostralo con l'aiuto di un diagramma di Venn.
«Ogni multiplo di 12 è multiplo di 6.»
«Ogni multiplo di 6 è multiplo di 3.»
―――――――――――――――――
«Ogni multiplo di 12 è multiplo di 3.»

Riconoscere uno schema

COME SI FA

▸ **Riconosciamo lo schema applicato in: «Se un numero è una potenza di 3, allora non è pari.»; «Un numero è pari, quindi non è una potenza di 3.».**

Scriviamo in simboli:

A: «Un numero è una potenza di 3.» B: «Un numero è pari.»

«Se un numero è una potenza di 3, allora non è pari.» $A \to \overline{B}$
«Un numero è pari, … B

B

…quindi… ―――――

…non è una potenza di 3.» $\overline{A}$

$\overline{A}$

Lo schema di ragionamento è: $[(A \to \overline{B}) \land B] \to \overline{A}$.
Poiché B è la negazione di $\overline{B}$ ($B = \overline{\overline{B}}$), lo schema è il modus tollens.

Riconosci gli schemi di ragionamento applicati scrivendo ognuno di essi in forma simbolica.

76 «Se non hai il biglietto dell'autobus, prendi la multa.»
«Non prendi la multa, quindi hai il biglietto dell'autobus.»

77 «Se arrivi in ritardo, non entri a teatro.»
«Arrivi in ritardo, quindi non entri a teatro.»

78 «Se passo col rosso, mi ferma il vigile; se mi ferma il vigile, pago.»
«Se passo col rosso, pago.»

79 «Se penso, allora sono.»
«Se non sono, allora non penso.»

80 «Se ingrasso non entro nei pantaloni; se non entro nei pantaloni, devo rifare il guardaroba.»
«Se ingrasso, devo rifare il guardaroba.»

81 «Se ho il foglio protocollo a righe, c'è il tema.»
«Non c'è il tema, quindi non ho il foglio protocollo a righe.»

82 «Se lavo i vetri, piove; se piove, i vetri si sporcano.»
«Se lavo i vetri, i vetri si sporcano.»

83 «Se sono bassa, salgo sulla sedia.»
«Sono bassa, quindi salgo sulla sedia.»

84 «Se un numero è naturale, allora è intero; se un numero è intero, allora è razionale.»
«Se un numero non è razionale, allora non è naturale.»

Stabilisci se i seguenti ragionamenti sono validi e, in caso affermativo, indicane il tipo.

85 «Se suona il telefono, rispondo.»
«Non rispondo, quindi non suona il telefono.»

86 «Se accendo il forno, non avvio la lavastoviglie; se non avvio la lavastoviglie, i piatti restano sporchi.»
«Se accendo il forno, i piatti restano sporchi.»

87 «Se il gatto miagola, ha fame.»
«Se il gatto non ha fame, non miagola.»

88 «Se il triangolo è rettangolo, applico il teorema di Pitagora.»
«Il triangolo è rettangolo, quindi applico il teorema di Pitagora.»

89 Applica il modus ponens, il modus tollens e la legge di contrapposizione alle seguenti premesse.

a. «Se un rombo ha gli angoli congruenti, allora è un quadrato.»
b. «Se in ogni materia la media dei miei voti è maggiore o uguale a 6, vengo promosso.»

RIEPILOGO Altri esercizi di logica

Enunciati e connettivi logici

90 **TEST** Solo una delle seguenti frasi è un enunciato logico. Quale?

- **A** «Strano esercizio!»
- **B** «La risposta a questo esercizio è la C.»
- **C** «Quale esercizio?»
- **D** «Questo esercizio non mi piace.»

91 **VERO O FALSO?** È un enunciato logico:

- **a.** «Oggi vieni a giocare a calcio con noi?» V F
- **b.** «15 è un multiplo di 2.» V F
- **c.** «La mia borsa è molto voluminosa.» V F
- **d.** «Corri!» V F
- **e.** «Tutti i poligoni hanno 4 lati.» V F
- **f.** «$10 : 5 = 2$» V F
- **g.** «Per favore, sii puntuale.» V F
- **h.** «Che cosa farai per il tuo compleanno?» V F

92 Stabilisci quali, tra i seguenti, sono enunciati logici. Per quelli che lo sono, indica il valore di verità.

- **a.** «€ 15 è un prezzo basso per una T-shirt»;
- **b.** «$2^4 < 4^2$»;
- **c.** «Il doppio di $\frac{3}{4}$ è 1,5»;
- **d.** «Marzo ha 30 giorni».

Attribuisci a ciascuna delle seguenti proposizioni il valore di verità.

93
- **a.** «Tutti i multipli di 4 sono anche multipli di 16»
- **b.** «L'uguaglianza $x^2 = 6$ non è mai verificata in $\mathbb{N}$»
- **c.** «Il prodotto di due numeri dispari è sempre un numero pari»
- **d.** «Venere è una stella»
- **e.** «Il rettangolo è un particolare parallelogramma»

94
- **a.** «La disuguaglianza $7 + x > 0$ può non essere verificata in $\mathbb{N}$»
- **b.** «Il massimo comune divisore fra due numeri pari è un numero pari»
- **c.** «Il Sole è un satellite del pianeta Terra»
- **d.** «L'opposto di 4 è $\frac{1}{4}$»
- **e.** «Il prodotto cartesiano tra insiemi è commutativo»

95 **COMPLETA** le seguenti frasi in modo che risultino enunciati veri.

a. «Il numero ______ è maggiore di 0»

b. «L'uguaglianza ______ è sempre verificata in $\mathbb{Q}$»

c. «I numeri ______ sono i divisori di 42»

d. «Il numero ______ è pari e multiplo di 7»

e. «Ogni ______ ha tre angoli congruenti»

96 Compila le tabelle a doppia entrata relative a congiunzione, disgiunzione inclusiva, disgiunzione esclusiva, implicazione materiale, coimplicazione materiale.

97 **TRADUCI** **DALLE PAROLE AI SIMBOLI** Le seguenti proposizioni sono proposizioni composte, costituite da enunciati distinti (componenti) legati da connettivi logici. Riscrivile in simboli, indicando con una lettera maiuscola ogni componente.

a. «Torino è una città piemontese ed è stata la prima capitale d'Italia.»

b. «I palloni da calcio non sono sferici e nemmeno quelli da basket.»

c. «Il numero 7 è positivo ed è un numero primo.»

d. «Un numero o è pari o è 42.»

e. «I giorni dell'anno sono 365 o 366.»

f. «O vado al mare o sul Monte Bianco.»

g. «Il numero 2 è minore di 3 e metà di 4.»

98 Dati gli enunciati: A: «7 è il quarto numero primo» e B: «7 è un divisore di 165», attribuisci il valore di verità a:

a. $A \vee B$; b. $A \wedge B$; c. $A \dot{\vee} B$; d. $A \rightarrow B$; e. $B \leftrightarrow A$.

TRADUCI **DAI SIMBOLI ALLE PAROLE** **Considera le seguenti proposizioni tutte vere:**
A: «sono in vacanza», B: «non lavoro», C: «faccio delle passeggiate», D: «sono al mare».
Traduci in parole le seguenti proposizioni e determina il loro valore di verità.

99 $\overline{B} \rightarrow \overline{C}$, $A \wedge C$, $D \rightarrow \overline{B}$, $C \rightarrow \overline{B}$.

100 $A \dot{\vee} \overline{B}$, $D \wedge C$, $A \vee D$, $A \rightarrow C$.

101 **SPIEGALO TU** Considera gli enunciati A: «Laura ha 18 anni.» e B: «Laura ha la patente.». In quali casi gli enunciati $A \wedge B$ e $A \vee B$ sono veri e in quali falsi? E $\overline{A \wedge B}$?

102 **INTORNO A NOI** Tre imputati di un delitto, Aldo, Bruno e Carlo, rilasciano le seguenti dichiarazioni:
Aldo: «Non sono colpevole»; Bruno: «Il colpevole è Carlo»; Carlo: «Il colpevole è Aldo».
Se sappiamo che uno solo dei tre imputati ha dichiarato il falso, chi è il colpevole?

Enunciati e quantificatori

103 **INVALSI** 2013 Indica se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera o falsa.

a. Se un numero è multiplo di 9, allora è multiplo di 3. V F

b. Un numero è multiplo di 6 solo se è pari. V F

c. Un numero è multiplo di 5 se e solo se è multiplo di 10. V F

d. Se un numero è pari, allora è multiplo di 4. V F

104 **TEST** L'enunciato aperto $A(x)$: «$x - 1$ è un numero naturale.», con $x \in \mathbb{N}$, si trasforma in un enunciato vero in uno solo dei seguenti modi; quale?

A Sostituendo a x il valore -1.

B Sostituendo a x il valore 1.

C Sostituendo a x il valore 0.

D L'insieme di verità coincide con l'insieme universo.

105 FAI UN ESEMPIO Fai un esempio di enunciato aperto e opportuno insieme universo per i quali le proposizioni ottenute con i quantificatori risultino:

a. entrambe vere; **b.** entrambe false.

Per ognuno dei seguenti enunciati aperti, scegli un dominio U appropriato e individua un suo elemento che rende vero l'enunciato e uno che lo rende falso; scrivi le proposizioni per tali elementi.

106 $A(x)$: «x è una persona con la patente.»
$B(x)$: «x è un felino.»

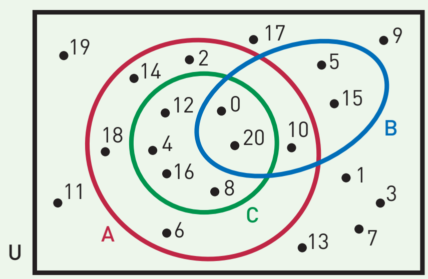
107 $A(x)$: «x è una verdura verde.»
$B(y)$: «Il fiume Po attraversa la regione y.»
$C(z)$: «z è un monte italiano.»

COME SI FA

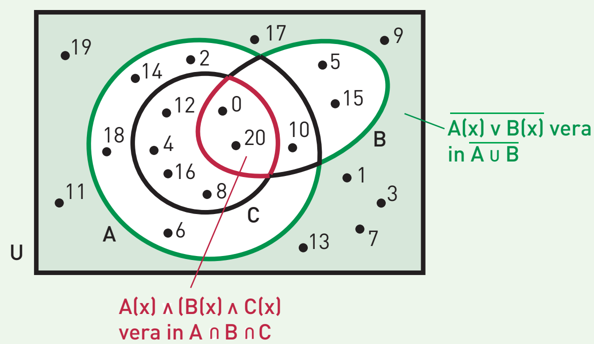
Consideriamo i tre enunciati aperti
$A(x)$: «x è un numero pari.», $B(x)$: «x è un multiplo di 5.», $C(x)$: «x è un multiplo di 4.».
e come dominio U l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali minori o uguali a 20.

▶ **Rappresentiamo con un diagramma di Venn l'insieme di verità:**

a. dei tre enunciati;



b. di $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$ e di $\overline{A(x) \vee B(x)}$.



Per ogni terna $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, dato il dominio U indicato, rappresenta con diagrammi di Venn l'insieme di verità: a. dei tre enunciati; b. degli enunciati $\overline{C}(x)$, $A(x) \vee B(x)$, $A(x) \wedge C(x)$, $\overline{A}(x) \vee C(x)$, $[A(x) \vee C(x)] \wedge B(x)$.

108 $A(x)$: «x è un poligono equilatero.»; $B(x)$: «x è un rettangolo.»; $C(x)$: «x è un quadrato.»; U è l'insieme dei poligoni.

109 $A(x)$: «x è un uomo.»; $B(x)$: «x è una donna.»; $C(x)$: «x è suocera.»; U è l'insieme delle persone.

110 $A(x)$: «x è un erbivoro.»; $B(x)$: «x è un carnivoro.»; $C(x)$: «x è un onnivoro.»; U è l'insieme degli animali.

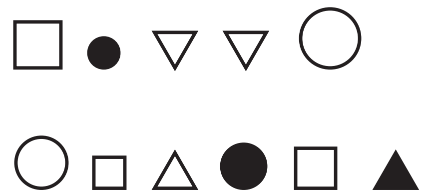
111 INVALSI 2003 Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

- A Alcuni multipli di 4 sono anche multipli di 8.
- B Tutti i multipli di 8 sono anche multipli di 4.
- C Tutti i numeri pari sono fra i multipli di 8.
- D Alcuni numeri pari non sono multipli di 8.
- E Alcuni numeri pari sono multipli di 8.

112 INVALSI 2004 Quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

- A Ogni numero intero divisibile per 3 è divisibile per 9.
- B Ogni numero intero divisibile per 4 è divisibile per 2.
- C Se il prodotto di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno dei due interi è divisibile per 5.
- D Se la somma di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno degli addendi è divisibile per 5.

113 INVALSI 2004 Osserva le figure. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?



A Non tutti i quadrati sono bianchi.
B Qualche triangolo è nero.
C Almeno un cerchio è nero.
D Non tutti i cerchi sono bianchi.

114 Indica per ogni enunciato il suo valore di verità.

a. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x+3=0$.
b. $\exists\, x \in \mathbb{N} \,|\, x$ è un numero primo.
c. $\exists\, x \in$ {rette del piano} $|\ x$ è parallela a una retta r data.
d. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > 0$.

115 TEST Dato il dominio U composto dalle figure del piano e l'enunciato $A(x)$: «x è un quadrilatero» con $x \in U$, quale enunciato è *falso*?

A $\forall x \in U$, x è un quadrilatero.
B $\forall x \in A$, x è una figura del piano.
C $\exists\, x \in U \,|\, x$ è un quadrilatero.
D $\exists\, x \in A \,|\, x$ è una figura del piano.

116 TEST Quale delle seguenti è equivalente alla proposizione: «Se un numero è divisibile per 18, allora è divisibile per 2 e per 3»?

A «Se un numero non è divisibile per 18, allora non è divisibile per 2 e per 3.»
B «Se un numero è divisibile per 2 e per 3, allora è divisibile per 18.»
C «Se un numero non è divisibile né per 2 né per 3, allora non è divisibile per 18.»
D «Se un numero non è divisibile per 2 o per 3, allora non è divisibile per 18.»

COME SI FA

▶ **Scriviamo le proposizioni che si ottengono dall'enunciato $A(x)$: «x è minore del suo doppio.» utilizzando i quantificatori $\forall$ e $\exists$ nell'insieme universo U dei numeri interi. Stabiliamo il valore di verità delle proposizioni ottenute.**

quantificatore	proposizione	valore di verità
$\forall$	$\forall x \in U,\ x < 2x$	F —— per esempio, $-3 \in \mathbb{Z}$ ma $-3 > 2 \cdot (-3)$
$\exists$	$\exists\, x \in U \,|\, x < 2x$	V —— per esempio, $2 \in \mathbb{Z}$ e $2 < 2 \cdot 2$

Per ognuno dei seguenti enunciati, scrivi le proposizioni che si ottengono utilizzando i quantificatori $\forall$ e $\exists$ e stabilisci il corrispondente valore di verità.

117 $U = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ è multiplo di 8$\}$; $A(x)$: «x è un numero pari.», $B(x)$: «x è un divisore di 16.», $\overline{B}(x)$.

118 $U = \{x \,|\, x$ è un felino$\}$; $A(x)$: «x è una lince.», $B(x)$: «x è un quadrupede.», $\overline{B}(x)$.

119 $U = \{x \,|\, x$ è una figura piana di area 16$\}$; $A(x)$: «x è un quadrato.», $B(x)$: «x è un cerchio.», $C(x)$: «x è un rettangolo di dimensioni 2 e 8.».

120 Sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali l'insieme in cui si considera la variabile x. L'espressione «Non esiste alcun numero naturale n che, moltiplicato per un numero naturale x qualsiasi, dia come risultato x stesso» di quale tra le seguenti proposizioni logiche è la traduzione? Tale proposizione è vera o falsa?

A $\nexists n \in \mathbb{N} \,|\, (\exists x \in \mathbb{N} \,|\, n \cdot x = x)$
B $\forall n \in \mathbb{N},\ \nexists\, x \in \mathbb{N} \,|\, n \cdot x = x$
C $\nexists n \in \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N},\ n \cdot x = x$

COME SI FA

Sono date le proposizioni:

A: «**Ogni** pagina del libro $\underbrace{\text{ha una figura.}}_{x}$»;

B: «**Esiste una** pagina del libro in cui *non* $\underbrace{\text{compare il colore blu.}}_{y}$».

► **Scriviamo la loro negazione.**

$\overline{A}$: «**Esiste una** pagina del libro che *non* $\underbrace{\text{ha una figura.}}_{\overline{x}}$»;

$\overline{B}$: «In **ogni** pagina del libro $\underbrace{\text{compare il colore blu.}}_{\overline{y}}$».

Per ognuna delle seguenti proposizioni scrivi la negazione.

121 «Ogni tavolo ha quattro gambe.»

122 «Non esiste un multiplo di 5 che non termina per 0.»

123 «Tutti i numeri naturali sono interi.»

124 «Esiste un numero naturale che è minore del suo cubo.»

125 INVALSI 2012 Quale tra le seguenti frasi è la negazione della proposizione «Tutti i numeri naturali sono dispari.»?

A Tutti i numeri naturali sono pari.
B Nessun numero naturale è dispari.
C Almeno un numero naturale non è dispari.
D Qualche numero naturale è dispari.

126 IN GARA Nel paese di Oz, oltre alle persone normali (che possono mentire o dire la verità), vivono cavalieri (che dicono sempre la verità) e furfanti (che mentono sempre). Una strana legge impone che in ogni matrimonio i coniugi siano entrambi normali, oppure uno cavaliere e l'altro furfante. Arrivati alla villetta bifamiliare dei coniugi Allegri e Bianchi, chiedete se il sig. Bianchi, che è assente, è un cavaliere, ottenendo risposta affermativa sia dalla sig.ra Bianchi sia da entrambi i coniugi Allegri. Che cosa potete concludere riguardo ai sig. Bianchi?

A Il sig. Bianchi è un cavaliere.
B Il sig. Bianchi è un furfante.
C Il sig. Bianchi è normale.
D È impossibile che le risposte date siano quelle riportate.
E Non potete concludere nulla.

[Olimpiadi di matematica italiane, Gara di 2° livello Biennio, 2003]

ESERCIZI