1 Spazio euclideo e vettori

Esercizio 1

Fascio di piani per una retta, angolo tra due piani
Nello spazio cartesiano, dati i punti $P = (2, -1, 4)$ e $Q = (3, 2, 3)$, scrivere equazioni parametriche della retta $\mathbf{r}$, quindi determinare un'equazione del fascio di piani per $\mathbf{r}$. Scrivere le equazioni dei piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ che passano rispettivamente per il punto $P_1 = (0, 0, 0)$ e per il punto $P_2 = (3, 0, 1)$. Trovare l'angolo formato dai piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$.

Esercizio 2

Circonferenza per tre punti non collineari, e sfera per quattro punti non complanari. Versione Geometrica
Nello spazio cartesiano, il luogo dei punti X che hanno la stessa distanza da due punti dati P e Q è un piano; più precisamente è il piano che passa per il punto medio del segmento PQ ed è perpendicolare a tale segmento (si veda l'esercizio 37 del capitolo 1 dell'eserciziario). Mostrare che per tre punti non allineati A, B, C passa un'unica circonferenza (la circonferenza circoscritta al trangolo $\triangle ABC$), e che per quattro punti non complanari A, B, C, D passa un'unica sfera (la sfera circoscritta al tetraedro di vertici A, B, C, D). Determinare le equazioni della circonferenza per $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, e della sfera che passa per questi tre punti e per l'origine. Determinare anche i centri e i raggi della circonferenza e della sfera, e verificare che il quadrato della distanza tra i due centri è uguale al quadrato del raggio della sfera meno il quadrato del raggio della circonferenza (disegnare un triangolo rettangolo che spiega questa relazione). Calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$ e della circonferenza a esso circoscritta, e il volume del tetraedro A, B, C, D e della sfera circoscritta.

Esercizio 3

Ortocentro di un triangolo
Mostrare che le tre altezze di un triangolo si incontrano in un punto C.

Esercizio 4

Incentro di un triangolo
Mostrare che le tre bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto C che è equidistante dai tre lati del triangolo, ed è quindi il centro della circonferenza inscritta.