1 Spazio euclideo e vettori

Risposta 1

Fascio di piani per una retta, angolo tra due piani
Equazioni parametriche di $\mathbf{r}$ sono $x(t) = 2+t$, $y(t) = -1+3t$, $z(t) = 4-t$. Un'equazione del fascio di piani per $\mathbf{r}$ è

$$\lambda(x + z - 6) + \mu(3x - y - 7) = 0$$

(nel controllare la soluzione si ricordi che l'equazione del fascio di piani non è unica), i piani $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ hanno equazione rispettivamente $11x - 6y - 7z = 0$ e $4x - y + z = 13$. L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ formato dai due piani è uguale all'angolo formato dalle loro direzioni normali, quindi è l'arcocoseno di

$$\cos(\alpha) = \frac{44 + 6 - 7}{\sqrt{206}\sqrt{18}} = \frac{43}{6\sqrt{103}}$$

(questo numero è circa $0,706$, che è poco più piccolo di $\sqrt{2}/2 = 0,7071...$, quindi α è poco più grande di $\pi/4$).

Risposta 2

Circonferenza per tre punti non collineari, e sfera per quattro punti non complanari. Versione Geometrica
La circonferenza ha equazioni $x + y + z - 1 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) - 1 = 0$, centro $(1/3, 1/3, 1/3)$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. La sfera ha equazione $x^2+y^2+z^2 = x+y+z$, centro $(1/2, 1/2, 1/2)$ e raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il quadrato della distanza è $1/12$. L'area del triangolo è

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il volume del tetraedro è $1/6$ per il volume del cubo che ha per spigoli uscenti dall'origine i tre versori degli assi, quindi è $1/6$. Per controllare i conti di area e volume, calcoliamo il volume del tetraedro usano come base il triangolo $\triangle ABC$. Il volume del tetraedro è $1/3$ del prodotto dell'area del triangolo $\triangle ABC$ per la relativa altezza; l'altezza è la distanza del piano ABC di equazione $x+y+z=1$ dall'origine, quindi è $1/\sqrt{3}$, e il volume del tetraedro è

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}.$$

Risposta 3

Ortocentro di un triangolo
Possiamo assumere che i vertici del triangolo siano $(0,0)$, $(a,0)$ e (b,c), con $a>0$ e $c>0$. Allora le tre altezze del triangolo si incontrano nel punto $(b, \frac{b(a-b)}{c})$.

Risposta 4

Incentro di un triangolo
Qual è il luogo dei punti equidistanti da due rette date?