2 Sistemi lineari

Esercizio 1

Sistema lineare con un parametro
Si consideri il sistema a coefficienti reali

$$\begin{cases} 2tx - y = t^2 \\ 3t^2x - z = 2t^2 \\ 9x - 6y + z = 4. \end{cases}$$

Si risolva il sistema rispetto alle indeterminate x, y e z con il metodo di Gauss per i valori $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$ del parametro t.

Esercizio 2

Numero di operazioni del MEG
Sia S un sistema lineare generico di n equazioni in n incognite.

1. Indicato con $M(n)$ il numero delle moltiplicazioni e divisioni e con $A(n)$ quello delle addizioni e sottrazioni per ridurre S a scala, si dimostri che

$$M(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}, \qquad A(n) = \frac{n^3 - n}{3}.$$

2. Se S è ridotto a scala, il corrispondente numero di operazioni per ottenere la soluzione per sostituzione retrograda è

$$M(n) = \frac{n^2 + n}{2}, \qquad A(n) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

3. Dedurre che il numero di operazioni per risolvere S con il metodo di Gauss è

$$M(n) = \frac{n^3 + 3n^2 - n}{3}, \qquad A(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

   in accordo con quanto scritto a pagina 95 del testo.

Suggerimento: verificare il caso $n = 1$ e poi procedere per induzione.

 © 978-88-08-19252-3

Esercizio 3

Circonferenza per tre punti non collineari. Versione algebrica
Nel piano cartesiano, una circonferenza ha un'unica equazione della forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Mostrare che per tre punti non collineari P_1, P_2 e P_3 passa un'unica circonferenza (collineari significa che esiste una retta che contiene i tre punti).

Esercizio 4

Sfera per quattro punti non complanari. Versione algebrica
Nello spazio cartesiano, una sfera ha un'unica equazione della forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Mostrare che per quattro punti non complanari P_1, P_2, P_3 e P_4 passa un'unica sfera.

Esercizio 5

Soluzioni approssimate del problema di Dirichlet.
Supponiamo di dover risolvere su un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un'equazione differenziale del second'ordine

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

soggetta alle condizioni che $y(a)$ e $y(b)$ siano assegnati. I valori della soluzione su $[a, b]$ possono essere calcolati in modo approssimato con il metodo seguente. Consideriamo una suddivisione di $[a, b]$ della forma $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ dove tutti gli n intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ hanno ampiezza $h = \frac{1}{n}(b - a)$. Se scriviamo $y_i = y(x_i)$ e facciamo lo stesso per y' e y'', allora la formula di Taylor per y arrestata al second'ordine fornisce

$$y_{i+1} \approx y_i + hy'_i + \frac{1}{2}h^2 y''_i, \qquad y_{i-1} \approx y_i - hy'_i + \frac{1}{2}h^2 y''_i$$

per tutti i punti interni della suddivisione. Se sottraiamo e sommiamo queste due formule otteniamo i valori approssimati

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

1. Verificare che sostituendo queste uguaglianze approssimate nell'equazione differenziale di partenza, posto $y_0 = y(a)$ e $y_n = y(b)$, posto $p_i = p(x_i)$ e fatto lo stesso per q e r, si ottiene il sistema lineare formato da $n - 1$ equazioni nelle $n - 1$ incognite $y_1, \ldots, y_{n-1}$

   $$(hp_i - 2)y_{i-1} - (2h^2 q_i - 4)y_i - (hp_i + 2)y_{i+1} = -2h^2 r_i$$

   per $i = 1, \ldots, n - 1$, le cui soluzioni forniscono i valori approssimati $y_i = y(x_i)$ della soluzione nei punti della suddivisione.

2. Scrivere esplicitamente la matrice completa del sistema quando l'equazione differenziale si riduce alla forma $y'' = r$

3. Risolvere col metodo descritto sopra il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} y'' = 6x - 12x^2 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

utilizzando una suddivisione di $[0, 1]$ in 6 intervalli e calcolando i valori approssimati y_i. Confrontare questi valori con quelli della soluzione esatta.