2 Sistemi lineari

Risposta 1

Sistema lineare con un parametro
Per $t = 1$ il sistema ha le infinite soluzioni $[1+s, 1+2s, 1+3s]^{\mathrm{T}}$. Per $t = 2$ il sistema ha l'unica soluzione $[4, 12, 40]^{\mathrm{T}}$. Per $t = 3$ il sistema non ha soluzioni.

Risposta 3

Circonferenza per tre punti non collineari. Versione algebrica
I punti $P_i = (x_i, y_i)$ appartengono alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ se e soltanto se il vettore $[c, a, b]^T$ risolve il sistema lineare

$$\begin{cases} c + x_1 a + y_1 b = -x_1^2 - y_1^2 \\ c + x_2 a + y_2 b = -x_2^2 - y_2^2 \\ c + x_3 a + y_3 b = -x_3^2 - y_3^2 \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Quindi esiste una e una sola circonferenza passante per i tre punti se e solo se la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 3. Il rango di $\mathbf{A}$ coincide col rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

ed è 3 se e solo se i tre punti non sono collineari.

Risposta 4

Sfera per quattro punti non complanari. Versione algebrica
I punti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ appartengono alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ se e soltanto se il vettore $[d, a, b, c]^T$ risolve il sistema lineare

$$\begin{cases} d + x_1 a + y_1 b + z_1 c = -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ d + x_2 a + y_2 b + z_2 c = -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ d + x_3 a + y_3 b + z_3 c = -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \\ d + x_4 a + y_4 b + z_4 c = -x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

Quindi esiste una e una sola sfera passante per i quattro punti se e solo se la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 4. Il rango di $\mathbf{A}$ coincide col rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

ed è 4 se e solo se i quattro punti non sono complanari (cf. libro di testo p. 56).

Risposta 5

Soluzioni approssimate del problema di Dirichlet.
La matrice richiesta al punto 2 ha la forma

$$\left[\begin{array}{rrrcrrr|r} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & y_0 - h^2 r_1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -h^2 r_2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -h^2 r_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & -h^2 r_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -h^2 r_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & y_n - h^2 r_{n-1} \end{array}\right]$$

La matrice completa del sistema al punto 3 è

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1/54 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1/54 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1/27 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 5/54 \end{array}\right]$$

Le soluzioni approssimate fornite dal sistema, insieme alle soluzioni esatte date dalla formula $y(x) = x^3(1 - x)$, sono indicate nella tabella seguente.

i	y_i approssimato	y_i esatto
1	0	$5/1296 \approx 0.004$
2	$1/54 \approx 0.019$	$2/81 \approx 0.025$
3	$1/18 \approx 0.056$	$1/16 \approx 0.063$
4	$5/54 \approx 0.093$	$8/81 \approx 0.099$
5	$5/54 \approx 0.093$	$125/1296 \approx 0.096$