3 Algebra delle matrici

Esercizio 1

Prodotto di un vettore colonna per un vettore riga
Se $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m,1)$ è un vettore colonna e $\mathbf{R} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(1,n)$ è un vettore riga, allora il prodotto $\mathbf{CR}$ è una matrice $m \times n$. Calcolare esplicitamente il prodotto $\mathbf{CR}$ nel caso generico e dimostrare che se $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(m,n)$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, allora

$$\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}_i(\mathbf{A})\mathbf{R}_i(\mathbf{B})$$

dove $\mathbf{C}_i(\mathbf{A})$ è la i-esima colonna di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}_i(\mathbf{B})$ è la i-esima riga di $\mathbf{B}$.

Esercizio 2

Esercizio sulla traccia di una matrice
Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ matrici quadrate di ordine n.

1. Dimostrare che $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.
2. Dedurre che $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$. Più in generale, è possibile dimostrare che la traccia è invariante rispetto alle permutazioni cicliche.
3. Fornire un controesempio che mostri come la traccia non è invariante rispetto ad ogni tipo di permutazione; ad esempio in generale risulta $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) \neq \mathrm{tr}(\mathbf{BAC})$.

Esercizio 3

Inversa di una matrice unipotente
Calcolare l'inversa della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & -a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Esercizio sul prodotto a blocchi
Sia $\mathbf{A}_n \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ la matrice $n \times n$

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dimostri che $\mathbf{A}_n$ è idempotente: $\mathbf{A}_n^2 = \mathbf{A}_n$. Si usi questa osservazione e il prodotto a blocchi per calcolare tutte le potenze della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5

Esercizio sull'invertibilità
Siano: $\mathbf{I}$ la matrice identità $n \times n$ e $\mathbf{U}$ una matrice $n \times n$ tale che $\mathbf{U}^4 = \mathbf{O}$. Mostrare che $\mathbf{I} - \mathbf{U}$ è invertibile e

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{U} + \mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^3.$$

Ripetere l'esercizio sostituendo l'ipotesi $\mathbf{U}^4 = \mathbf{O}$ con $\mathbf{U}^k = \mathbf{O}$ dove $k \geq 1$ è un numero intero qualsiasi: l'inversa in questo caso è $\mathbf{I} + \mathbf{U} + \cdots + \mathbf{U}^{k-1}$. Suggerimento: moltiplicare $\mathbf{I} - \mathbf{U}$ per $\mathbf{I} + \mathbf{U} + \mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^3$.