4 Spazi vettoriali

Esercizio 1

Dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d
Sia $V_{d,n}$ l'insieme dei polinomi reali omogenei di grado d nelle $n+1$ variabili $x_0, \ldots, x_n$: un elemento di $V_{d,n}$ è un polinomio della forma

$$P(x_0, \ldots, x_n) = \sum a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

dove la somma è estesa ai multiindici $(i_0, \ldots, i_n)$ tali che $i_0 + \cdots + i_n = d$ e $i_j \geq 0$ per ogni $j = 0, \ldots, n$, e i coefficienti $a_{i_0,\ldots,i_n}$ sono numeri reali. Mostrare che la dimensione di $V_{d,n}$ è il coefficiente binomiale $\binom{n+d}{n}$.

Esercizio 2

Componenti di un vettore rispetto a una base
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & -a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che le colonne di $\mathbf{A}$ formano una base di $\mathbb{R}^4$, e determinare il vettore delle coordinate di $\mathbf{v} = [x, y, z, w]^T$ rispetto a tale base.

Esercizio 3

Polinomio interpolatore di Lagrange.
Sia $n > 0$ un intero, sia $\mathbb{R}[x]/(x^n)$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali in una indeterminata di grado strettamente minore di n e sia $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ una successione strettamente crescente di numeri reali.

1. Dimostrare che per ogni indice $i = 1, \ldots, n$ esiste un unico polinomio $p_i \in \mathbb{R}[x]/(x^n)$ che soddisfa la condizione $p_i(a_j) = \delta_{ij}$.

2. Dimostrare che $\{p_1, \dots, p_n\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]/(x^n)$.

3. Dedurre che per ogni successione $(b_1, \dots, b_n)$ di numeri reali esiste un unico polinomio $p \in \mathbb{R}[x]/(x^n)$ tale che $p(a_i) = b_i$ per $i = 1, \dots, n$ e dare una formula esplicita per p.

4. Dati i quattro punti $P_1 = (-2, -1)$, $P_2 = (-1, 3)$, $P_3 = (1, -1)$ e $P_4 = (2, 3)$, determinare la base $\{p_1, \dots, p_4\}$ di $\mathbb{R}[x]/(x^4)$ corrispondente alle loro ascisse e determinare l'unico polinomio $p \in \mathbb{R}[x]/(x^4)$ che passa per i quattro punti dati.