4 Spazi vettoriali

Risposta 1

Dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d
Una base di $V_{d,n}$ è costituita dai monomi $x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}$ per cui il multiindice $(i_0,\ldots,i_n)$ soddisfa $i_0+\cdots+i_n=d$ e $i_j\geq 0$. I multiindici $(i_0,\ldots,i_n)$ che soddisfano $i_0+\cdots+i_n=d$ e $i_j\geq 0$ si dividono in due tipi: quelli che hanno $i_n=0$, che sono tanti quanti i multiindici $(i_0,\ldots,i_{n-1})$ che soddisfano $i_0+\cdots+i_{n-1}=d$, e quelli che hanno $i_n\geq 1$, che sono tanti quanti i multiindici $(j_0,\ldots,j_n)$ che soddisfano $j_0+\cdots+j_n=d-1$. Quindi procedendo per induzione su n e d otteniamo

$$\dim V_{d,n}=\dim V_{d,n-1}+V_{d-1,n}=\binom{n+d-1}{n-1}+\binom{n+d-1}{n}=\binom{n+d}{n}.$$

Risposta 2

Componenti di un vettore rispetto a una base
La matrice ha rango 4, per cui le colonne formano una base di $\mathbb{R}^4$. Il vettore delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a tale base è

$$\mathbf{X}(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} x+ay+(a^2+b)z+(a^3+2ab+c)w \\ y+az+(a^2+b)w \\ z+aw \\ w \end{bmatrix}$$

Risposta 3

Polinomio interpolatore di Lagrange.
I polinomi p_i possono essere scritti nella forma

$$p_i(x)=\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right)$$

se $n > 1$; per $n = 1$ il prodotto vuoto è l'elemento neutro del prodotto, cioè il polinomio 1. Il polinomio al punto 3 è

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i(x)$$

e quello al punto 4 è $p(x) = x^3 - 3x + 1$.