5 Applicazioni lineari

Esercizio 1

Valori di un polinomio
Siano $x_0, \ldots, x_d$ numeri reali distinti. Mostrare che per ogni scelta di $d+1$ numeri reali $y_0, \ldots, y_d$ (non necessariamente distinti) esiste un unico polinomio $P(x)$ di grado $\leq d$ tale che

$$P(x_k) = y_k \qquad \text{per ogni } k = 0, \ldots, d.$$

Esercizio 2

Polinomi di Taylor.
Sia $\mathbb{K}[x]/(x^n)$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in Kdi grado minore di n.

1. Si fissi un elemento $a \in \mathbb{K}$ e si consideri la funzione $t_a : \mathbb{K}[x]/(x^n) \to \mathbb{K}[x]/(x^n)$ definita dalla formula $t_a(p(x)) = p(x-a)$. Si dimostri che la funzione t_a è un automorfismo di $\mathbb{K}[x]/(x^n)$.

2. Si dimostri che l'insieme di polinomi $\mathcal{B}_a = \{1, (x-a), \ldots, (x-a)^{n-1}\}$ è una base di $\mathbb{K}[x]/(x^n)$. Si concluda che ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]/(x^n)$ si scrive in modo unico nella forma
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k.$$
Questo è lo sviluppo di Taylor di p in a.

3. Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{K}[x]/(x^n)$ a $\mathcal{B}_a$ (può essere più semplice calcolare la matrice rappresentativa di t_a^{-1} rispetto alle stesse basi).

4. Utilizzare i risultati al punto precedente per calcolare lo sviluppo di Taylor del polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$ in $a = 1$.

 © 978-88-08-19252-3

Esercizio 3

Formula di Taylor
Siano x_0 un numero reale. Sia $\mathbb{R}[x]_d$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a d in una variabile. Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}[x]_d$ l'applicazione lineare che al vettore $[a_0, \ldots, a_d]^T$ associa il polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_d}{d!}(x - x_0)^d.$$

Sia $\mathfrak{M} : \mathbb{R}[x]_d \to \mathbb{R}^{d+1}$ l'applicazione lineare che a un polinomio $P(x)$ associa il vettore delle sue prime $d + 1$ derivate in x_0:

$$\mathfrak{M}(P(x)) = [P(x_0), P'(x_0), \ldots, P^{(d)}(x_0)]^T$$

Mostrare che $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{M}$ sono lineari, e che $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}$ è l'applicazione identità di $\mathbb{R}^{d+1}$ in se stesso. Concludere che $\mathfrak{L}$ è un isomorfismo con inversa $\mathfrak{M}$, e quindi che $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{M}$ è l'applicazione identità di $\mathbb{R}[x]_d$, cioè

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{P^{(d)}}{d!}(x - x_0)^d$$

per ogni polinomio $P(x)$ di grado $\leq d$.