5 Applicazioni lineari

Risposta 1

Valori di un polinomio
Sia $\mathbb{R}[x]_d$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a d in una variabile. Sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}[x]_d \to \mathbb{R}^{d+1}$ l'applicazione lineare definita da

$$\mathfrak{L}(P(x)) = [P(x_0), \ldots, P(x_d)]^T$$

Se $P(x) \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{L})$, allora per la regola di Ruffini $P(x)$ è divisibile per

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_d).$$

Ma $P(x)$ ha grado $\leq d$, quindi non può essere divisibile per un polinomio di grado $d+1$ a meno che non sia il polinomio nullo. Questo mostra che il nucleo di $\mathfrak{L}$ è ridotto al polinomio nullo, quindi $\mathfrak{L}$ ha rango $d+1$ ed è perciò suriettiva.

Risposta 2

Polinomi di Taylor.
La matrice rappresentativa ha nella i-esima colonna i coefficienti binomiali di $(a+1)^{i-1}$ e lo sviluppo di Taylor di p è $p(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$.

Risposta 3

Formula di Taylor
Lasciamo al lettore la verifica che le due applicazioni sono lineari. Per verificare che $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{L}$ sia l'applicazione identità di $\mathbb{R}^{d+1}$ occorre mostrare che, per ogni $k = 0, 1, \ldots, d$ la derivata di ordine k di

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_d}{d!}(x - x_0)^d$$

in x_0 è esattamente a_k, e questo è immediato. Quindi $\mathfrak{L}$ è invertibile a sinistra (il che equivale a dire che è iniettiva), ragion per cui è un isomorfismo (dominio e codominio hanno la stessa dimensione), ma allora l'inversa sinistra $\mathfrak{M}$ è anche un'inversa destra.