6 Determinante

Esercizio 1

Equazione della retta per due punti nel piano cartesiano (rispettivamente del piano per tre punti nello spazio cartesiano.
Mostrare che tre punti $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ appartengono a una stessa retta se e solo se è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Analogamente, mostrare che quattro punti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ appartengono a uno stesso piano se e solo se è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2

Sul determinante di Vandermonde
Siano $x_1, \dots, x_d$ numeri reali. Sia $\mathbb{R}[x]_{d-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a $d-1$ in una variabile, e sia $\mathfrak{L} : \mathbb{R}[x]_{d-1} \to \mathbb{R}^d$ l'applicazione lineare definita da

$$\mathfrak{L}(P(x)) = [P(x_1), \dots, P(x_d)]^T$$

Scrivere la matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ rispetto alla base

$$\{1, x, \dots, x^{d-1}\}$$

di $\mathbb{R}[x]_{d-1}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^d$. Si calcoli il determinante di tale matrice, e si concluda che $\mathfrak{L}$ è un isomorfismo se e solo se $x_1, \dots, x_d$ sono distinti.

Esercizio 3

Determinante di matrici antisimmetriche

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici antisimmetriche:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & -a_{14} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ -a_{32} & 0 & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ antisimmetrica reale. Mostrare che $\det(\mathbf{A}) = 0$ se n è dispari, e che $\det(\mathbf{A}) \geq 0$ se n è pari (attenzione quest'ultima affermazione non è semplice da dimostrare).